

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Северный (Арктический) федеральный
университет имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

ШИРИКОВА ТАТЬЯНА СЕРГЕЕВНА

**МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GEOGEBRA**

Специальность 13. 00. 02 – теория и методика обучения и воспитания
(математика)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Научный руководитель:
доктор педагогических наук, профессор
Шабанова Мария Валерьевна

Архангельск – 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В МЕТОДИКЕ ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕМ И ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ	19
1.1. Информатизация геометрического образования: положительные и отрицательные эффекты применения компьютерных средств	19
1.2. Анализ российского и зарубежного опыта использования компьютерного эксперимента при изучении основных теорем планиметрии в школе	37
1.3. Возможности различных систем динамической геометрии в реализации этапов изучения геометрических утверждений	62
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1	75
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕМ И ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ DGS GEOGEBRA	78
2.1 Модель поэтапного формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием GeoGebra.....	78
2.2 Условия и механизмы реализации в основной школе модели поэтапного обучения доказательству с использованием DGS GeoGebra.....	104
2.3. Эксперимент и обработка его результатов.....	159
2.3.1. Проведение констатирующего этапа эксперимента и обработка его результатов	161
2.3.2. Поисковый этап эксперимента и его результаты	166
2.3.3. Формирующий этап эксперимента и его результаты	169
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2	177
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	180
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	185
ПРИЛОЖЕНИЕ	204

Введение

Актуальность работы. Современный период информатизации общества и образования определяет необходимость обновления и совершенствования методики обучения математике в средней школе, о чем свидетельствует содержание всех обсуждаемых сегодня проектов Концепции развития математического образования в Российской Федерации [43]. Особенно остро эта необходимость проявляется в отношении методики обучения геометрии, где все активнее начинают применяться системы динамической геометрии (DGS): Cabri Géomètre, Математический конструктор, Живая математика, GeoGebra, Crocodile, Cinderella, GeoNext, Geometr's Sketchpad и др. Общей особенностью этих систем является возможность создания и использования для целей учебного исследования динамических чертежей - «...геометрических конструкций, которые можно изменять при сохранении алгоритма их построения путем задания изменений одного или нескольких геометрических величин конструкций (параметров)» [77, с.7]. Эффективность программных продуктов этого класса в реализации исследовательского подхода к обучению геометрии сегодня уже не вызывает сомнений. Она подтверждена многочисленными зарубежными и российскими исследованиями (G. Hanna, K. Jones, A. Mariotti, В.А. Далингер, В.Н. Дубровский, С.Н. Поздняков, Т.Ф. Сергеева, М.В. Шабанова, М.Г. Шабат). Между тем учителями (В.И. Рыжик, И.С. Храповицкий) и специалистами в области теории и методики обучения математики (Н.Х. Розов, В.А. Далингер, С.Н. Поздняков) все чаще высказываются опасения, что увлечение экспериментальным методом в геометрии может нанести вред формированию готовности учащихся основной школы к использованию дедуктивного метода как основы обоснования истинности геометрических утверждений: утрате потребности в его использовании и соответствующих умений. При этом не подвергается сомнению сохранение высокой общекультурной значимости владения данным методом в современном мире. Овладение искусством доказательства признается одной из важнейших целей обучения геометрии в школе, начиная с момента зарождения системы геометрического образования. Об этом свидетельствуют как результаты исследований, посвященных истории

геометрического образования (Ф. Клейн, Т.С. Полякова, О.В. Тарасова, Р.С. Черкасов и др. [39, 40, 41, 61]), так и содержание государственных образовательных стандартов 1 и 2 –го поколения. В стандартах 2-го поколения отмечается общекультурная значимость умения проводить доказательство высказанных утверждений. Доказательством этого является включение соответствующих требований не только в перечень предметных, но и метапредметных результатов обучения: «Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы основного общего образования должны отражать:... 9) умение ... аргументировать и отстаивать своё мнение» [121, с.7].

Методический подход к обучению доказательству дедуктивным методом, ставший традиционным для российской школы, описан в трудах Г.Д. Глейзера, В.А. Гусева, В.А. Далингера, Г.В. Дорофеева, Ю.М. Колягина, Е.И. Лященко, Г.И. Саранцева, И.М. Смирновой, А.А. Столяра, И.Ф. Шарыгина, А.В. Ястребова и др.

Основу этого подхода составляет аксиоматический (в локальном или глобальном смысле) метод построения школьного курса геометрии, систематическое включение учащихся в деятельность овладения представленными в учебниках способами доказательств теорем, а также использование этих способов при решении задач на доказательство и обоснование правильности шагов решения геометрических задач других типов [83, 104, 120].

Обучение дедуктивному методу доказательства традиционно начинается в 7 классе с ознакомления с исходными положениями геометрии и элементарными следствиями из них, с предъявления учащимся образцов доказательных рассуждений, подтверждающих геометрические факты, которые воспринимаются учащимися как очевидные. Реализация такого подхода приводит к типичным для учебной практики трудностям, связанным с запретом на использование учащимися других критериев убедительности (критерий авторитетности, критерий признанности большинством, критерий практики, критерий наглядности, критерий привлекательности, критерий логической сводимости к истинным утверждениям) и иных методов проверки (метод наглядно-

эмпирического подтверждения, метод применения на практике, контрпример и др.) истинности утверждения.

Многочисленными исследованиями психологов (Р.С. Немов, В.В. Давыдов, Ж. Пиаже, Р. Солсо, Д. Халперн) установлено, что формирование способности к дедуктивным рассуждениям должно идти через переосмысление и переоценку компонентов, входящих в содержание субъективного (доучебного) опыта аргументации высказываемых утверждений, и проверку истинности утверждений, высказанных собеседником. Как показывает проведенный нами констатирующий эксперимент, в содержании этого опыта у учащихся, приступающих к обучению геометрии, преобладает наглядность в качестве субъективного критерия убедительности, экспериментирование, как метод проверки высказанных утверждений, в ситуациях появления сомнений или возражений (см. параграф 2.3). Аналогичные результаты представлены в работах зарубежных ученых [158, 160, 162, 168, 169]. Однако эти данные пока не нашли применение в методике работы с теоремой. Между тем механизм интеграции субъектного и социокультурного опытов в процессе обучения составляет основу достаточно большого количества методик, связанных с достижением иных образовательных результатов: методики формирования предпонятий геометрического объекта в пропедевтическом курсе геометрии начальной школы (Н.С. Подходова); методики ознакомления учащихся 5-6 класса с элементами логики при изучении пропедевтического курса геометрии (О.Л. Безумова); технологии методологически-ориентированного обучения математики (М.В. Шабанова) и др.

DGS, которые стали бурно развиваться с конца 1980-х г.г., а также широко использоваться в практике обучения геометрии во Франции, США, Канаде, Австрии, Великобритании, Германии, Испании, Италии и др., существенно изменили взгляды учителей этих стран на сложившуюся систему работы с теоремой [155, 163, 164, 171]. Основное внимание в ней стало уделяться этапам подведения учащихся к открытию факта теоремы путем постановки перед ними исследовательской задачи, решаемой средствами DGS, и проверки истинности утверждения методом контрольного компьютерного эксперимента. Интерес учащихся к экспериментальному открытию геометрических фактов и

убедительность наглядно-эмпирического их подтверждения оказались столь высоки, что в этих странах появилась опасность, что доказательство дедуктивным методом «...будет «заброшено» в пользу экспериментального подхода к математическому обоснованию» (Mason, 1993). Подтверждением этих опасений являются экспериментальные данные о заметном снижении познавательной активности учащихся на этапе доказательства утверждений дедуктивным методом, открытых с помощью компьютерного эксперимента, а также об отказе самих учителей-экспериментаторов от этого этапа работы с теоремой (R. Marrades, A. Gutierrez, 2000, C. Christou, N. Mousoulides, 2004, R. Leikin, D. Grossman, 2012). Таким образом, появление DGS, создав благоприятные условия для реализации исследовательского подхода в обучении геометрии, привело к неоправданному снижению доли теоретических методов в методике работы с теоремой. Данная ситуация охарактеризована многими зарубежными исследователями как «*экспериментально-теоретический разрыв*» в обучении геометрии (G. Hanna, K. Jones, A. Mariotti). Она вызвала бурную дискуссию и среди ученых, занимающихся проблемами использования DGS в обучении.

На Западе пик этой дискуссии пришелся на 90-е г.г. XX века. Итогом обсуждений стало внесение изменений в стандарты и программы по математике, которыми регулируются соотношения и устанавливаются образовательные функции теоретических и эмпирических методов (включая компьютерный эксперимент). Так, например, в стандартах математического образования США (NCTM, 2000 г.) [154], говорится, что:

- обучение доказательству должно быть частью программ на всех уровнях математического образования;
- доказательства, проводимые дедуктивным методом, обладают множеством образовательно-значимых функций, кроме функции убедить в истинности утверждений, и в обучении доказательству необходимо делать акцент на них (проверка, объяснение, демонстрация системологии науки, открытие следствий, коммуникация, построение теории из отдельных фактов, исследование, установление связей);

- основным результатом обучения доказательству в школе должно стать умение выбирать и разумно сочетать различные методы обоснования утверждений.

В нашей стране острота этих проблем только еще нарастает, что связано с введением в действие ФГОС общего образования, требованиями которых предусматривается самое широкое использование DGS в процессе обучения геометрии в качестве средства поддержки проектной и исследовательской деятельности учащихся, но не формулируются ориентиры, связанные с определением оптимального соотношения экспериментальных и теоретических методов в образовательном процессе.

Вопросами определения роли и места компьютерного эксперимента в системе методов работы с теоремой в нашей стране занимаются такие ученые, как В.А. Далингер, В.Н. Дубровский, В.И. Рыжик, Т.Ф. Сергеева, М.В. Шабанова, Г.Б. Шабат, и др. Основным направлением их исследований является определение условий использования компьютерного эксперимента на различных этапах работы с теоремой с учетом закономерностей развития теоретического мышления учащихся.

Представленные нами данные о накопленном в России и за рубежом опыте применения систем динамической геометрии при изучении теорем, а также о результатах проведенного нами констатирующего эксперимента позволили выявить следующие **противоречия**:

- между признанием общекультурной значимости овладения дедуктивным методом учащимися основной школы и тенденцией к постепенному отказу от обращения к данному методу в целях увеличения доли учебного времени для исследовательской деятельности средствами DGS;

- между высоким уровнем активности учащихся на этапе открытия теоремы методом компьютерного эксперимента и их пассивностью на этапе доказательства теоремы дедуктивным методом;

- между наличием экспериментальных данных о содержании субъектного (доучебного) опыта учащихся, связанного с оценкой истинности утверждений с использованием наблюдений и экспериментов, и методикой обучения

доказательству теорем в курсе геометрии основной школы, не учитывающей эти особенности содержания субъектного опыта учащихся.

На основе выявленных противоречий нами была определена **проблема диссертационного исследования**: какая методика обучения доказательству теорем обеспечит формирование у учащихся основной школы умений правильно использовать сочетание дедуктивного метода и метода компьютерного эксперимента при проверке и демонстрации истинности геометрических утверждений?

Все вышесказанное и определило актуальность избранной нами темы исследования «Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra».

Объект исследования - процесс обучения геометрии учащихся основной школы.

Предмет исследования – обучение учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием системы динамической геометрии GeoGebra

Цель исследования – выявить теоретические и методические основы формирования умений, связанных с проведением доказательств теорем при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием системы динамической геометрии GeoGebra.

Гипотеза исследования – формирование у учащихся основной школы умений, связанных с проведением доказательства теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra, будет успешным, *если*:

- в процессе обучения доказательству теорем *будет осуществлен* поэтапный переход от овладения методом компьютерного эксперимента к овладению дедуктивным методом на основе осознания учащимися границ, норм и условий их применения;

- при проектировании условий обучения доказательству *будет реализована* идея интеграции содержания субъектного опыта учащихся, связанного с проверкой истинности утверждений экспериментальным методом, с социокультурным опытом использования этого метода в сочетании с

дедуктивным методом при аргументации утверждений в коммуникативной деятельности и опытом доказательства утверждений в математике;

-при изучении теорем DGS GeoGebra *будет использована* не только в качестве средства, подводящего учащегося к открытию факта теоремы, но и в качестве средства предварительной проверки истинности гипотез и визуализации шагов доказательства.

Для достижения поставленной цели и проверки выдвинутой гипотезы необходимо было решить ряд **задач исследования**:

1. Уточнить содержание понятия *компьютерного эксперимента*, проводимого средствами DGS; раскрыть объем данного понятия путем выделения видов эксперимента, отнесенных к различным этапам элементарного цикла учебного познания; отобрать программные средства, поддерживающие все виды компьютерных экспериментов, необходимых для реализации методики работы с планиметрической теоремой.

2. Разработать модель поэтапного формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием GeoGebra, которая обеспечит интеграцию в учебном процессе содержания субъектного опыта учащихся, связанного с проверкой истинности утверждений с социокультурным опытом аргументации утверждений в коммуникативной деятельности, и опытом доказательства утверждений в математике.

3. Разработать педагогические условия практической реализации модели поэтапного формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием DGS GeoGebra;

4. Экспериментально проверить эффективность предлагаемой нами методики обучения доказательству теорем учащихся основной школы при изучении геометрии с использованием DGS GeoGebra.

Теоретико-методологическими основами исследования являются:

-концепция информатизации образования (С.А. Бешенков, Я.А. Ваграменко, А.П. Ершов, А.А. Кузнецов, В.М. Монахов, И.В. Роберт и др.);

-деятельностный подход в образовании и его применение к обучению математике (Л.С. Выгодский, В.В. Давыдов, О.Б. Епишева, Н.Х. Розов и др.);

-личностно-ориентированный подход в образовании и его применение к обучению геометрии (В.А. Гусев, Н.С. Подходова, И.С. Якиманская и др.);

-исследовательский подход в образовании и его применение к обучению геометрии (Н.Г. Алексеев, А.В. Леонтович, М.И. Махмутов, Н.И. Мерлина, А.С. Обухов, Н.Н. Поддъяков, А.И. Савенков, М.В. Шабанова, А.В. Ястребов и др.);

-философские и методологические основы обучения доказательству в математике (А.Л. Жохов, О.В. Зими́на, В.В. Мадер, Н.В. Метельский, Дж. Пойа, А. Пуанкаре, Г.И. Саранцев, А.А. Столяр, В.А. Тестов, В.А. Успенский, Л.М. Фридман, Дж. Ханна и др.);

-когнитивно-визуальный подход к обучению геометрии и его психологические основы (Р. Арнхейм, Д. Гильберт, В.А. Далингер, М. Иден, С. Конн-Фоссен, Н.А. Резник и др.);

-концептуальные основы использования DGS в обучении математике (С. Гроздев, В.А. Далингер, Н. Джакив, В.Н. Дубровский, С.Г. Иванов, Ж.-М. Лаборд, В.Р. Майер, С.Н. Поздняков, В.И. Рыжик, Т.Ф. Сергеева, Х. Шуман, М. Хохенватер, М.В. Шабанова, Г.Б. Шабат и др.);

-теория педагогического эксперимента и статистической обработки результатов (В.В. Афанасьев, В.И. Загвязинский, А.Д. Наследов, Е.В. Сидоренко и др.).

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования**:

- *теоретические*: анализ зарубежной и отечественной научно-методической и психолого-педагогической литературы по проблеме исследования, нормативных документов, изучение и обобщение педагогического опыта, классификация и систематизация полученных данных, теоретическое моделирование учебного процесса, методическое проектирование экспериментального обучения;
- *эмпирические*: проведение педагогического эксперимента, наблюдение, анкетирование, тестирование;

- *статистические*: непараметрические методы статистического анализа данных педагогического эксперимента (критерий χ^2 - Фридмана, критерий χ^2 - Пирсона).

База исследования. Исследование проводилось в период с 2010 по 2013 годы в ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В.Ломоносова». Экспериментальной базой являлись пилотные площадки Архангельской области Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании (МИТЕ)»: МБОУ СОШ №1, МБОУ СОШ №8, МБОУ СОШ №20, МБОУ СОШ №24, МБОУ СОШ №25, МБОУ СОШ №34, МБОУ СОШ №37, МБОУ СОШ №51, МБОУ СОШ №55, МБОУ СОШ №57, МБОУ СОШ №95, МБОУ ОСОШ, МБОУ «ОГ № 21», ГБОУ АКШИ АМКК г.Архангельска, МАОУ СОШ № 2 г. Северодвинска, МБОУ СОШ № 24 г. Северодвинска, МБОУ «СОШ № 90» п. Кулой Вельский р-н, МБОУ «Верхнее-Матигорская средняя школа», Холмогорский р-н, МБОУ Усть-Шоношская СОШ № 19, МБОУ «Пежемская СОШ №14», МБОУ «Левковская СОШ № 7», МБОУ «Солгинская СОШ № 86», МБОУ «СОШ №92 г. Вельска», МБОУ «Аргуновская ООШ № 11», МБОУ «Судромская ООШ №13», МБОУ «Угреньгская ООШ № 10», МБОУ СОШ № 3 г. Вельск (27 школ).

Этапы исследования:

На первом этапе (2010-2011 гг.) был осуществлен теоретический анализ проблемы исследования; определены объект, предмет, цель, гипотеза и задачи исследования; проведен констатирующий эксперимент, в результате которого зафиксированы проявления «экспериментально-теоретического разрыва» при обучении геометрии с использованием DGS на пилотных площадках проекта МИТЕ, собраны данные о субъективных критериях убедительности учащихся, приступающих к изучению геометрии, выявлены затруднения учащихся основной школы, возникающие при оценке, анализе и построении доказательств геометрических утверждений дедуктивным методом; намечены пути преодоления выявленных негативных явлений.

На втором этапе (2011-2012 гг.) была осуществлена разработка и детализация теоретических положений методики поэтапного обучения доказательству, выявлены возможности DGS и осуществлен обоснованный выбор GeoGebra в качестве средства поддержки образовательного процесса, проводился поисковый эксперимент, основными задачами которого являлись предварительная проверка и корректировка задачного материала и цифровых образовательных ресурсов, разработанных для реализации теоретически спроектированных этапов обучения доказательству учащихся основной школы.

На третьем этапе (2012-2013 гг.) проводились обоснование теоретически разработанной методики обучения доказательству геометрических утверждений с использованием возможностей DGS, формирующий эксперимент, целью которого являлась проверка эффективности разработанной методики на различных этапах изучения систематического курса геометрии в 7-9 классах. Полученные экспериментальные и теоретические результаты были обобщены, сформулированы выводы, подтверждающие выдвинутую гипотезу.

Достоверность и обоснованность результатов исследования достигается благодаря опоре на фундаментальные методологические, педагогические и психологические исследования, а также на работы в области теории и методики обучения математике и информатике; непротиворечивости использованных положений в области теории и методики обучения математики; согласованности теоретических и эмпирических методов, которые адекватны целям и задачам исследования; экспериментальной проверкой полученных результатов исследования, а также использованием для обработки экспериментальных данных стандартизированных статистических методов.

Личный вклад автора заключается *в разработке* методики формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием GeoGebra; *в разработке* учебных материалов для практической реализации этой методики и ее экспериментальной апробации с непосредственным участием в ходе экспериментов в качестве учителя математики МБОУ СОШ г. Архангельска, а также в качестве консультанта учителей-экспериментаторов других пилотных площадок.

Апробация и внедрение результатов исследования осуществлялись:

- через применение результатов исследования в практике работы школьников проекта;
- через выступления с сообщениями:
 - на Ломоносовских чтениях (ноябрь 2009 г., ноябрь 2010г.ПГУ, Архангельск, ноябрь 2011 г. САФУ, Архангельск);
 - на Международных Колмогоровских чтениях (май 2011 г., май 2012 г., ЯГПУ, Ярославль);
 - на Международной научно-практической конференции «Современные достижения в науке и образовании: математика и информатика» (2-5 февраля 2010 г., САФУ, Архангельск);
 - на Международной научно-практической конференции «Информатизация как целевая ориентация и стратегический ресурс образования» (29 февраля-4 марта 2012г., САФУ, Архангельск);
 - на XLVIII Всероссийской (с международным участием) конференции «Математическое образование и информационное общество: проблемы и перспективы» (18-21 апреля 2012г.РУДН, Москва);
 - на Восьмой международной научно-практической конференции педагогов России и ближнего зарубежья в Санкт-Петербурге по теме «Особенности современных школьников, их потребности и запросы» (ноябрь 2011г., Санкт-Петербург);
 - на Всероссийском съезде учителей математики в МГУ имени М.В. Ломоносова (28-30 октября 2010 г. Москва);
 - на методических семинарах для учителей математики подготовила и провела два практических занятия: «Методика работы с теоремой в ИГС GeoGebra», «Подготовка ИГС GeoGebra для организации исследовательского обучения при решении задач с параметром» (САФУ, Архангельск);
 - на курсах повышения квалификации учителей математики г.Архангельска и Архангельской области выступила с докладом «Виды компьютерного эксперимента и их использование в обучении математике (февраль 2013 г.);

- на методическом объединении учителей математики окружного ресурсного центра г.Архангельска выступила с докладом «Обучение геометрии с использованием ИГС» (апрель, 2012 г.);

- через проведение открытых мероприятий – открытого урока «Параллельный перенос и поворот» с учащимися 9 класса МБОУ ОСОШ г.Архангельска в рамках Международной научно-практической конференции «Информатизация как целевая ориентация и стратегический ресурс образования» (1 марта 2012г.);

- через участие в конкурсе научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области информатики и информационных технологий в рамках Всероссийского фестиваля науки (сентябрь 2011 г. г.Белгород); в фестивале авторских методических разработок по организации проектной и исследовательской деятельности учащихся в рамках VII Международного конкурса «Математика и проектирование» (апрель 2013 г.);

- через участие в написании учебно-методического пособия по математике.

Научная новизна работы заключается в том, что:

1. Создана *модель поэтапного формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем* при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием GeoGebra. Модель реализует идею интеграции содержания субъектного опыта учащихся, связанного с проверкой истинности утверждений экспериментальным методом на основе актуализации социокультурного опыта аргументации утверждений в коммуникативной деятельности, и опытом доказательства в математической деятельности геометрических утверждений дедуктивным методом. Модель включает три основных этапа: *обучение эмпирической проверке* геометрических утверждений; *обучение логическому контролю* правильности алгоритма построения динамического чертежа для целей контрольного компьютерного эксперимента; *обучение доказательству дедуктивным методом*.

2. Раскрыты механизмы реализации модели *поэтапного формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем*, в глобальном и локальном смыслах. Механизм реализации модели в глобальном смысле

представлен методической схемой достижения этапных целей, которые реализуются через комплекс задач, отнесенных к этапам: актуализации и раскрытия содержания имеющегося опыта обоснования утверждений, переосмысления под воздействием социокультурного опыта, формирования нового опыта. Механизм реализации модели в локальном смысле представлен методикой работы с теоремами и задачами на проверку, обоснование (доказательство) утверждений. Эта методика включает в себя те же этапы интеграции опытов.

3. В соответствии с механизмами определен комплекс педагогических условий достижения этапных результатов обучения доказательству: *содержательные условия* - темы курса геометрии основной школы, отнесенные к этапам формирования умений, и их основные содержательные элементы (теоремы и специальные виды задач на обоснование утверждений); *организационные условия* - методика изучения теорем, адекватная по своей структуре этапам исследовательского цикла учебного познания с учетом достигнутого уровня овладения дедуктивным методом; *материально-технические условия* - готовые динамические чертежи для проведения контрольных компьютерных экспериментов, схемы оформления отчета об экспериментах, образцы записи алгоритмов построения и обоснования динамических чертежей, компьютерные визуализации доказательств теорем.

Теоретическая значимость результатов исследования состоит:

- в уточнении и дополнении существующих описаний этапов процесса информатизации общего геометрического образования в России: создание и включение микрокалькуляторов (МКШ) в комплект учебного оборудования (1981 – 1984 г.г.), определение принципов создания обучающих систем и перспектив от их внедрения (1985 -1993 г.г.), создание обучающих систем программных продуктов образовательного назначения (1993 – 2000 г.г.), разработка компьютерных инструментов поддержки учебной деятельности (2001 – 2005 г.г.), создание электронных информационно-образовательных ресурсов, развитие, оптимизация и модернизация управления системой федеральных

образовательных порталов (2006 – 2010 г.г.), подготовка к переходу на использование возможностей новых ИТ (с 2011 г.).

- в раскрытии спектра семантических значений термина «доказательство», включенного в содержание субъектного опыта учащихся, приступающих к изучению курса геометрии основной школы и спектра значений, освоение которых определено требованиями к результатам обучения доказательству, представленным в содержании ФГОС ООО;

- в уточнении понятия *компьютерного эксперимента*, проводимого средствами образовательных программ, относящихся к классу систем динамической геометрии, через раскрытие роли этих программных средств в постановке, проведении и обработке данных эксперимента;

- в установлении соответствия видов компьютерного эксперимента различным этапам элементарного цикла учебного познания: конструктивный эксперимент (направлен на проверку существования объекта, описанного в условии теоремы); разведочный эксперимент (направлен на открытие факта теоремы); контрольный эксперимент (направлен на проверку выдвинутой гипотезы); модифицирующий эксперимент (направлен на развитие идеи доказанного утверждения).

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что:

- *предложен банк задач* для обучения доказательству с DGS GeoGebra учащихся с 7 по 9 класс, согласованный с поурочным планированием [75] изучения геометрии с использованием базового УМК Л.С. Атанасяна [15] и электронного образовательного ресурса «Наглядная планиметрия», авторы Н.Х. Розов, А.Г. Ягола, Т.Ф. Сергеева, И.Н. Сербис [96, 97, 98]; банк задач создан в соответствии с требованиями к содержательным условиям реализации модели поэтапного формирования умений, связанных с проведением доказательств; в банк задач включены задачи на экспериментальную проверку правильности утверждений в DGS GeoGebra с последующим логическим объяснением результатов (для реализации этапа обучения эмпирической проверки), на обоснование правильности алгоритмов построения динамических чертежей в DGS GeoGebra (на этапе обучения логическому контролю) и на исследование

возможности развития идеи доказанного утверждения (на этапе обучения доказательству дедуктивным методом); все задачи сопровождаются методическими указаниями по их использованию и могут быть использованы при обучении геометрии в основной школе;

- *подготовлено учебное пособие*, включающее описание методики обучения доказательству теорем при изучении геометрии основной школы с использованием возможностей системы динамической геометрии GeoGebra [76]; данное пособие *внедрено* в практику ДПО САФУ имени М.В.Ломоносова.

Положения, выносимые на защиту:

1. DGS GeoGebra является эффективным средством формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем, при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием GeoGebra в связи с тем, что:

-разработка алгоритмов создания динамических чертежей в DGS требует самого широкого использования определений и теорем геометрии;

-динамические чертежи делают видимыми взаимосвязи свойств геометрических объектов;

-открытые средствами DGS факты требуют привлечения дедуктивного метода доказательства в качестве объяснительной основы наблюдаемых явлений;

-DGS облегчает учащимся способ восприятия геометрического объекта при проведении доказательств дедуктивным методом (дает возможность выделять значимые и скрывать незначимые элементы чертежа, менять ракурс, реконструировать объект);

-DGS позволяет развернуть ход рассуждений во времени, представить его с той или иной полнотой, которая необходима для помощи учащемуся.

2. В методической модели поэтапного формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием GeoGebra, ведущая роль принадлежит идее интеграции трех видов опыта: субъектного опыта учащихся, связанного с оценкой истинности утверждений; социокультурного опыта аргументации и критической

оценки утверждений в коммуникативной деятельности; опыта использования дедуктивного метода при доказательстве утверждений в математике.

3. Модель поэтапного формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием GeoGebra, реализуется, во-первых, через комплекс задач, обеспечивающих актуализацию и раскрытие содержания имеющегося у учащихся опыта обоснования утверждений, его «окультуривание» (т.е. переосмысление под воздействием социокультурного опыта), формирование нового опыта в соответствии с этапными целями обучения; во-вторых, через методику изучения теорем планиметрии и обучения решению задач на проверку, обоснование (доказательство) утверждений.

Структура диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 171 источника, и 1 приложения. Общий объем работы 250 страниц, из них 203 страницы основного текста.

ГЛАВА 1. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В МЕТОДИКЕ ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕМ И ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1. Информатизация геометрического образования: положительные и отрицательные эффекты применения компьютерных средств

Процесс информатизации математического образования начался в России гораздо раньше, чем процесс информатизации других учебных предметов. Принято считать, что точкой отсчета является 1985 год, когда в учебный план общеобразовательных учреждений был введен предмет *Основы информатики и вычислительной техники*, насыщенный первоначально алгоритмами решения математических задач. Однако следует признать, что работы, направленные на определение роли и места микропроцессорной техники (микрокалькуляторов, ЭВМ) в системе средств обучения математике велись и в более ранний период. Начиная с 1982 года, в типовой перечень учебно-наглядных пособий и учебного оборудования для общеобразовательных школ были включены специальные школьные микрокалькуляторы МКШ-2 (Приказ Министерства просвещения СССР от 30.12.1981 года). Их образовательное назначение раскрывалось в инструктивно-методическом письме Министерства Просвещения СССР [72]. В частности, там говорилось, что микрокалькуляторы «...используются не только для упрощения вычислительной работы, но ... и для подведения учащихся к некоторым гипотезам, которые доказываются в дальнейшем». Обучение приемам работы с микрокалькулятором рекомендовалось начинать с VII класса. Одно из методических достоинств микрокалькулятора, отмечаемых в инструктивном письме, значимо для нашего исследования. Оно «...состоит в том, что с его использованием можно организовать проведение, так называемых, машинных экспериментов» [72, с.6].

Основной задачей информатизации образования, в частности, геометрического, в период 1985 – 1993 г.г. являлась разработка принципов создания обучающих систем. Наиболее значимый вклад для решения этой задачи внесли такие ученые, как Ершов А.П., Монахов В.М., Кузнецов А.А., Ваграменко Я.А., Матросов В.Л. и др.

В своем выступлении [31] А.П. Ершов перечислил основные ожидаемые эффекты от использования компьютера в образовательном процессе. Перечислим некоторые из них, наиболее значимые для нашего исследования: «...2. Будучи в состоянии принять на себя роль активного партнера с динамическим сочетанием вызова и помощи, компьютер тем самым стимулирует активность учащихся...5. Внутренняя формализованность работы компьютера, строгость в соблюдении «правил игры» в сочетании с принципиальной познаваемостью этих правил способствует большей осознанности учебного процесса, повышают его интеллектуальный и логический уровень. 6. Способность компьютера к построению визуальных и других сложных образов существенно повышает пропускную способность информационных каналов учебного процесса. 7. Компьютер вносит в учебный процесс принципиально новые познавательные средства, в частности вычислительный эксперимент, решение задач с помощью экспертных систем, конструирование алгоритмов и пополнение баз знаний. 9. Наконец, свойства универсальности и программируемости, способность к многоцелевому применению компьютера позволяют во многих случаях сократить стоимость технических средств обучения за счет исключения затрат на натурный эксперимент и лабораторные работы и более дешевой программной настройки с одного применения на другое.» [31, с.18]. Также А.П.Ершов отмечает, что благодаря динамизации математических объектов происходит приближение учебного процесса к исследованию и эксперименту. [31, с.34]

Не менее значимыми для нашего исследования являются и труды Монахова В.М. В 1986 году он представил Концепцию информатизации школьного математического образования, ядро которой составили следующие положения:

«1. Специфика содержания учебного предмета и ее учет в формулировке требований к программным педагогическим продуктам.

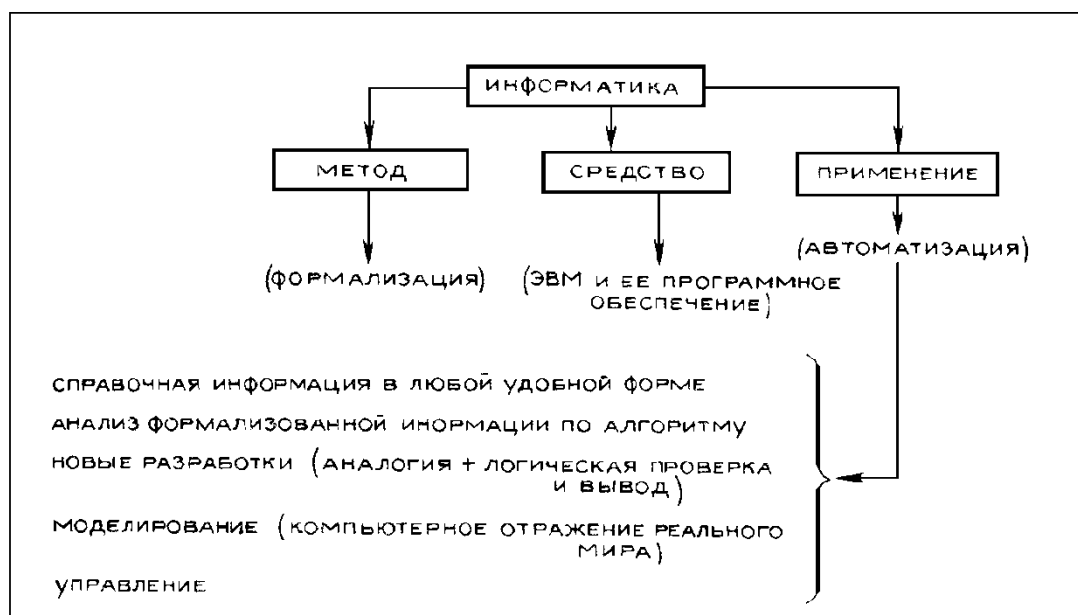
2. Особенности взаимосвязи новых учебных программ как нормативных документов, программирующих основные компоненты учебно-воспитательного процесса в массовой школе, и программных педагогических продуктов¹.

3. Методика отработки с помощью программных педагогических продуктов необходимого объема знаний и умений на уровне, зафиксированном в «Требованиях к знаниям и умениям» новых программ.

4. Разработка конструктивных продуктивных рекомендаций по созданию программных педагогических продуктов и по их оценке, позволяющей выявить соразмерность их методической эффективности с экономическими затратами» [65, с.33].

Главным результатом его деятельности в этой области следует признать создание информационной модели учебного процесса, который впоследствии стал широко использоваться как теоретическая основа создания обучающих программ, реализации идей программированного обучения и разработки образовательных технологий. В работе [65, с.34] свою модель он представляет в виде схемы (см. схему 1).

Схема 1.



¹Здесь и далее необходимо различать: новые учебные программы (как нормативный документ обучения) и программные педагогические продукты (для компьютера).

В данной модели представлены два основных направления использования информационных технологий, представляющих практический интерес для методики:

- 1) как метод проектирования и представления содержания обучения, позволяющий достичь его предельной формализации;
- 2) как средство, повышающее эффективность обучения за счет передачи компьютеру рутинных аспектов, сопровождающих умственную деятельность.

Эти направления реализуются через автоматизацию образовательного процесса (создание обучающих систем, реализующих эти возможности).

Методические исследования в области использования компьютерных технологий в этот период были направлены на определение перспектив от введения нового средства в образовательный процесс. Так, например, Ю.Ю. Юдин, В.Д. Степанов в [150] описывают возможные эффекты от включения в систему средств обучения геометрии динамических чертежей. По мнению авторов, такие чертежи обладают большей образовательной ценностью, нежели статические. Описывая преимущества компьютерного способа создания динамических чертежей, они отмечают, что «... электронные подвижные чертежи можно моделировать с помощью различных технических средств: кинопроектора, кодоскопа, дисплея (видеотерминала). ...Компьютер же позволяет остановить движение на экране дисплея, вернуться назад к предыдущим чертежам и самое важное – позволяет вмешиваться в демонстрационный процесс: задать другое расположение фигуры («повернуть его другой стороной»), провести новое сечение пространственной фигуры, вписать в нее другую фигуру и т.п.» [150, с.16].

Свидетельством внимания государства к проблеме информатизации образования явилось учреждение нового научно-методического журнала «Информатика и образование», первый номер которого вышел в 1986 году. В нем освещались и освещаются сегодня дидактические, методические, технологические, психолого-педагогические, социально-экономические, эргономические и организационные аспекты внедрения информационных технологий в сферу образования.

В 1993г. была принята Программа информатизации образования в Российской Федерации на 1994-1995 г.г., которая была опубликована в этом журнале [91].

Положения данной программы дали новый толчок для разработки обучающих систем, в том числе и для целей обучения геометрии. Так в диссертации Барановой Е.И. (1997год) [4] были раскрыты методические возможности программы “The Geometer’s Sketchpad” применительно к обучению геометрии учащихся 7–9 классов. На основе этого программного обеспечения автором были разработаны курсы компьютерной геометрии, призванные дополнить базовый учебно-методический комплект:

- “Основы геометрии в среде “The Geometer’s Sketchpad” (7 класс, 17 часов),
- “Геометрические исследования в среде “The Geometer’s Sketchpad” (8 класс, 15 часов),
- “Изучение геометрии в среде “The Geometer’s Sketchpad” (9 класс, 15 часов).

Курс компьютерной геометрии для 7 класса призван сформировать у учащихся базовые навыки построения в среде GSP, а также правильные представления о вводимых геометрических понятиях посредством динамических чертежей. Курс для 8 класса призван «...помочь ученику пройти три первых уровня геометрического мышления (анализ, уровень неформальной индукции, уровень формальной индукции), то есть научить открывать, попытаться научить тому, что математики делают бессознательно: сначала представить и проанализировать проблему, сделать предположение и только потом пытаться провести доказательство» [4, с. 12]. Третий курс для 9 классов призван обобщить знания учащихся по планиметрии и сформировать у учащихся наглядное представление о новых понятиях: преобразования плоскости и их применении при решении конструктивных задач, методе координат и уравнения линий.

Интересным является то, что недостатки среды GSP в поддержке обучения доказательствам автор пытается компенсировать за счет создания собственной *Предметно-ориентированной среды «Геометрия»*, которая «...может отвечать на геометрические вопросы, касающиеся отношения принадлежности, равенства,

параллельности, перпендикулярности, касания двух геометрических объектов», а также «...может проверять равенство выражений, в которых участвуют характеристики геометрических объектов (например, теорема Пифагора для построенного треугольника)» [4, с. 14].

В диссертации Марюкова М.Н. (1998 год) [57] не только раскрыта роль компьютерных технологий в обучении геометрии, но и разработана методическая система изучения базового курса геометрии, позволяющая реализовать образовательные функции компьютерных технологий. Она включала в себя дидактические цели на каждом этапе обучения, средства и методы их достижения, к которым и относятся компьютерные технологии. В диссертации были описаны основные методы использования ИКТ, в частности, такие, как компьютерные демонстрации и компьютерный эксперимент. Им было введено в научный оборот и раскрыто содержание нескольких понятий, значимых для нашего исследования: «компьютерная модель геометрической фигуры», «компьютерные демонстрации», «компьютерный эксперимент».

Решение вопросов, связанных с разработкой новых технологий обучения математике, а также с использованием возможностей компьютерной техники в этот период осуществлялось и в рамках работы специализированного Центра информатизации образования (КИО: конструируй, исследуй, оптимизируй). Он был создан по совместной программе СССР и ЕС в 1993 году. Научным руководителем Центра стал Поздняков С.Н., профессор кафедры высшей математики ЛЭТИ, а главным методистом Центра – преподаватель той же кафедры Иванов С.Г. Редакционно-издательская деятельность этого центра началась в 1998 с издания журнала «Компьютерные инструменты в образовании» (в 2008 году от него отделился журнал «Компьютерные инструменты в школе»).

Кроме того, в данный период в РАО был создан Институт информатизации образования (1996 год), который получил статус ведущего учреждения РАО по проблемам информатизации образования и координатора научных исследований в этой области в России. Первым директором института был Глейзер Г.Д. С 2001 года Институтом руководит Роберт И.В. ИИО РАО в период 1996-2003 г.г. вел активную работу по разработке концепции стандартизации применения

информационных и коммуникационных технологий в процессе изучения общеобразовательных предметов. В рамках этой работы были выделены особенности применения информационных технологий в математическом образовании: при реализации компьютерных методов исследования математических моделей, при использовании компьютерных средств создания геометрических объектов, при применении компьютерной графики к развитию пространственного мышления учащихся.

В связи с начавшимся процессом интеграции российской системы образования в мировое образовательное пространство 5-6- июля 1996 г. в Москве был проведен II Международный Конгресс ЮНЕСКО «Образование и информатика», итогом которой стала разработка новой единой Концепции информатизации сферы образования России. Необходимость решения этой задачи была подтверждена приказом Минобразования России от 06.07.1997 г. В соответствии с этим приказом Концепция была разработана и её проект заслушан на заседании рабочей группы 26.09.1997 г. Однако, разразившийся в стране экономический кризис помешал дальнейшему утверждению реализации этой программы.

Вновь к вопросу информатизации образования на государственном уровне возвратились лишь в 2001 году. Постановлением Правительства РФ от 28 августа 2001 г. № 630 была утверждена Федеральная целевая программа «Развитие единой образовательной информационной среды (2001-2005 годы)». Эта программа предусматривала обеспечение УО современными аппаратно-программными средствами, развитие инфраструктуры, обеспечивающей доступ к информационным ресурсам и гарантированное обслуживание техники, повышение соответствующей квалификации работников образования, разработка электронных обучающих средств, позволяющих дистанционно учащимся и педагогам обучаться, а лучшим педагогам - обучать. В рамках решения задач ФЦП была осуществлена разработка российской системы динамической геометрии «1С. Математический конструктор». Первая версия этой программы вышла в 2005 году. В этот же период (2000-2005) в систему российского геометрического образования стали внедряться и другие системы динамической

геометрии: Cabri, Geometers Sketchpad, Geonext, GeoGebra, Живая математика и др. Свидетельством этому стало появление в сети Интернет электронных образовательных ресурсов, созданных учителями-новаторами на базе этих ИГС [29]. В этот период значительно возросло число методических исследований, посвященных вопросам информатизации геометрического образования [1, 17, 37, 53, 64, 114, 116, 118]. Анализ диссертационных исследований того периода показал, что специфика методических подходов к решению задач информатизации геометрического образования состояла не в создании обучающих систем, а в разработке компьютерных инструментов учебного познания.

В [37] сформулированы основные требования к компьютерным инструментам продуктивной учебной деятельности. «Использование компьютерной поддержки продуктивной деятельности учащегося в процессе решения математических задач должно строиться на основе компьютерной информационной среды, моделирующей предметное содержание изучаемого материала. Среда должна обеспечивать педагогическую свободу учителя и информационную свободу ученика. Информационная среда должна обеспечить различные уровни управления познавательной свободой ученика» [37, с.3].

Кроме того, автором выделены значимые для методики конструирования и использования информационной среды (ИС) в процессе продуктивного учебного математического познания составляющие ИС: компьютерная модель предметной среды, средства конструирования предметной среды, модель исследовательской деятельности учащегося, манипуляторы.

Автором отмечается, что ИС должна использоваться на всех этапах учебного познания: при проверке конечного результата (ответа), при построении примеров и контрпримеров, при постановке гипотез, при составлении новых задач.

Эти требования реализованы в авторских интерактивных сборниках задач по алгебре (7-9 класс), алгебре и основам математического анализа (10-11 класс).

Аналогичны результаты и диссертационного исследования [116]. В нем предложены ЭОР (для их обозначения в работе используется термин

«педагогические программные продукты»): "Конструктор определений", "Конструктор доказательств теорем", "Конструктор схем связей понятий", приведена методика использования этих ЭОР при формировании геометрических понятий. ЭОР являются приложением операционной системы Windows и имеют следующие особенности: минимальный объем вводимой информации посредством выбора объектов с помощью мыши, оперативный контроль правильности выполнения задания с выдачей сообщения о допущенной ошибке.

Одним из значимых результатов исследования [64] является разработка системы ЭОР для поддержки учебной деятельности учащихся при изучении стереометрии и методика их использования в учебном процессе.

Автор работы [53] в своем исследовании доказывает целесообразность использования в учебном процессе готовых программных продуктов образовательного назначения, построенных на идеологии «открытия» геометрии и создающих предпосылки для компьютерного геометрического эксперимента. К числу таких программных продуктов динамической геометрии он относит DGS, опираясь на результаты анализа зарубежного опыта.

Автор выделяет *риски*, связанные с переходом на использование DGS в процессе обучения геометрии:

-«...отсутствие в учебных заведениях и личном пользовании большинства учеников, студентов и преподавателей необходимого количества компьютеров. Преподаватели геометрии практически не имеют возможность проводить занятия по своему предмету в компьютерных кабинетах»;

-«...отсутствие достаточного числа учителей математики в школах и преподавателей геометрии в педвузах, владеющих компьютером и компьютерными технологиями на должном уровне»;

- «...отсутствие методической системы геометрической подготовки студентов математических факультетов педвузов, среди средств обучения которой одно из центральных мест занимают компьютерные средства».

В [118] автор доказывает возможность использования компьютерных средств для развития обобщенных пространственных представлений (ОПП), учащихся. При этом он доказывает значимость учета психологических

закономерностей. Опираясь на эти закономерности, он формулирует ряд правил использования компьютерных средств для развития ОПП:

«- привлечение кинестетического анализатора на начальном этапе формирования ОПП;

- использование *субъектного опыта* ученика;
- организация работы с «воздушной моделью» изучаемого геометрического объекта;

- применение наглядности после, а не до мысленного выполнения заданий на оперирование пространственными образами;

- переход к организации работы с изображениями геометрических объектов после того, как первичное представление об этом объекте уже сформировано;

- организация работы с изображениями геометрических объектов при помощи их материальных моделей;

- осуществление работы на осознание ребенком неоднозначности изображения»[118, с.4].

Специфику методических исследований этого периода Н.Х. Розов охарактеризовал следующим образом: «Сейчас настало время активно разрабатывать общие методические принципы и конкретные методические приемы использования компьютерных технологий и продуктов в учебном процессе» [94].

В этот период проводится большая работа по популяризации ЭОР и методик обучения геометрии, основанных на их использовании. Ярким примером является серия статей Дубровского В.Н. в газете «Компьютерные инструменты в образовании» под названием «Динамическая геометрия», в которой описываются различные аспекты возможного использования DGS «1 С: Математический конструктор» в курсе геометрии общеобразовательной школы [25, 26, 27].

В 2006 году Постановлением Правительства РФ от 23 декабря 2005 г. №803 утверждена новая Федеральная целевая программа развития образования на 2006-2010 годы, одной из задач которой являлось совершенствование содержания и технологий образования. В число мероприятий, направленных на решение данной задачи, было включено «создание электронных информационно-образовательных

ресурсов, развитие, оптимизация и модернизация управления системой федеральных образовательных порталов» [80, с.3].

В настоящее время информатизация образования представляет многоплановый процесс подготовки к переходу на использование возможностей, предоставляемых новыми информационными технологиями, который включает в себя, по определению И.В. Роберт, обеспечение «...сферы образования методологией, технологией и практикой разработки и оптимального использования информационных технологий, ориентированных на реализацию психолого-педагогических целей обучения и воспитания и используемых в комфортных и здоровьесберегающих условиях» [93, с.2].

Анализ данного определения показывает, что основными задачами информатизации образования являются:

- создание электронных образовательных ресурсов для целей предметного обучения и управления системой образования;
- разработка технологий и методик предметного обучения с использованием электронных образовательных ресурсов;
- физиолого-гигиенический аспект организации компьютерной поддержки образовательного процесса и электронного обучения;
- социальные вопросы образования в условиях информационного общества.

Нормативную основу решения этих задач сегодня составляют:

Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ "Об образовании в Российской Федерации"), Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5-9 кл.), СанПиН 2.4.2.2821-10 "Санитарно-эпидемиологические требования к условиям и организации обучения в общеобразовательных учреждениях".

Новый ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» 2013 г. законодательно закрепил возможность использования в системе образования дистанционных образовательных технологий, возможность электронного образования с включением в содержание электронной информационно-образовательной среды образовательной организации электронных информационных ресурсов, электронных образовательных ресурсов,

совокупность информационных технологий, телекоммуникационных технологий, соответствующих технологических средств и обеспечил освоение обучающимися образовательных программ в полном объеме независимо от места нахождения обучающихся [123, с.56].

Нормативно необходимость решения задачи информатизации образования при обучении математике в школе определены требованиями стандартов нового поколения: ФГОС ООО [122], утвержденные в 2010 г. и ФГОС С(П)ОО [121], утвержденные в 2012 г.

Федеральные государственные образовательные стандарты основного общего образования нового поколения определяют повышенные требования к компьютерной поддержке процесса предметного обучения, а также новые требования к его результатам.

Информационно-образовательная среда «...должна обеспечивать: информационно-методическую поддержку образовательного процесса ...» (ФГОС третьего поколения [122]). Применение информационных и коммуникационных технологий в процессе обучения математике, в соответствии с требованиями того же стандарта, должно привести к достижению следующих результатов обучения: «... 9) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах; 10) формирование информационной и алгоритмической культуры; формирование представления о компьютере как универсальном устройстве обработки информации; развитие основных навыков и умений использования компьютерных устройств; ...» [121].

В СанПиН [88] определены следующие нормы продолжительности непрерывного использования в образовательном процессе технических средств обучения (см.таблицу1).

Таблица 1.

Продолжительность непрерывного применения
технических средств обучения на уроках

	Непрерывная длительность (мин.), не более	
--	---	--

Классы	Просмотр статических изображений на учебных досках и экранах отраженного свечения	Просмотр телепередач	Просмотр динамических изображений на учебных досках и экранах отраженного свечения	Работа с изображением на индивидуальном мониторе компьютера и клавиатурой	Прослушивание аудиозаписи	Прослушивание аудиозаписи в наушниках
1-2	10	15	15	15	20	10
3-4	15	20	20	15	20	15
5-7	20	25	25	20	25	20
8-11	25	30	30	25	25	25

В настоящее время ведется активная работа по переходу основной школы на новые образовательные стандарты, что требует от методической наукой решения двух задач: задачи отбора и/или разработки специализированных программных средств, которые могут быть использованы учащимися в качестве эффективного инструмента учебной деятельности при обучении математике и задачи оптимального использования возможностей, предоставляемых этими инструментами.

Применительно к процессу обучения геометрии первая из этих задач сегодня чаще решается за счет создания коллекции *динамических листов* на базе существующих систем динамической геометрии (GeoGebra, GeoNext, Живая математика, Математический конструктор и др.), т.е. электронных образовательных ресурсов различного уровня интерактивности и различного содержания: линейных / нелинейных манипуляторов (В.И. Рыжик, С.Н. Поздняков, С.Г. Иванов), апплетов и динамических моделей (В.Н. Дубровский, Г.Б. Шабат), анимаций (Т.Ф. Сергеева) [100, 25, 26, 27, 95, 96].

Вторая задача решается за счет апробации и внедрения в массовую практику методики обучения математике с использованием различных систем динамической геометрии: GeoGebra [75, 103], Математический конструктор [25, 26, 27], Живая математика [36, 135], выявления и распространения передового учительского опыта в ходе проведения различных конкурсов («Формула будущего "ИТ-образование в Рунете", "Современная школа" и др.). Авторы базовых учебно-методических комплексов в соответствии с требованиями ФГОС ООО разрабатывают электронные приложения к учебникам. По геометрии уже

созданы ЭОРы к УМК И.Ф. Шарыгина, Л.С. Атанасяна, А.Д. Александрова и др. [29]. Одним из важных явлений информатизации стало создание федеральной системы информационно-образовательных ресурсов (ФСИОР), основными задачами которой являются систематизация и предоставление свободного доступа к русскоязычным электронным образовательным ресурсам для различных категорий участников образовательного процесса.

Исследования в этой области сегодня активно ведутся и за рубежом. Особенностью западных подходов к решению данных вопросов являются упор на обширную экспериментальную базу, на основе которой получены результаты и сделаны соответствующие выводы.

Известный исследователь в области использования DGS в обучении математике Дж. Ханна в своих статьях [157, 158, 159] описывает результаты работ, проведенных Dawson J. W., 2006, Corfield D., 2003, Rav Y., 1999; Manin, 1998; Thurston, 1994.

Все работы описывают в целом успешное использование динамического программного обеспечения. Р. Маррадес, и А. Гутьеррес в [161] считают, что DGS может быть использовано для улучшения понимания учащимися природы математического доказательства и улучшения навыков доказательства. Кроме того, авторы показывают, как DGS, при предоставлении учащимся более широкого доступа к разведке, эвристике и визуализации фактически увеличивают их понимание ограниченности таких неформальных подходов и, соответственно, необходимость использования дедуктивного метода доказательства.

Y. Rav в статье [168] утверждает, что доказательства намного важнее, чем проверка математических претензий, что они на самом деле являются носителями математических знаний, а также необходимы для расширения этих знаний.

Анализ публикаций, посвященных этой проблеме, показал, что ученые разных стран выделяют не только положительные, но и отрицательные эффекты, связанные с привлечением компьютерной техники к процессу обучения математике (см. таблицу 2).

Таблица 2.

Эффекты, связанные с привлечением компьютерной техники

«+»	«-»	
Доступность исследовательской деятельности учащимся любого уровня подготовки	«Экспериментально-теоретический разрыв»	Опасность утраты способности к теоретическому поиску
Повышение учебной мотивации		Утрата потребности в дедуктивном обосновании
Снижение учебной тревожности		Опасность снижения уровня развития логического мышления и уровня овладения доказательством
Расширение программного материала за счет возможности рассмотрения дополнительных геометрических фактов		Потеря конструктивных навыков использования традиционных инструментов
Повышение наглядности обучения геометрии		Опасность дальнейшего снижения уровня визуального мышления учащихся из-за его подмены восприятием готовых изображений.

Несмотря на наличие рисков, популярность этих продуктов нарастает, о чем свидетельствует анализ публикаций.

В 2001 году в Великобритании был опубликован доклад рабочей группы Королевского общества, занимающейся решением проблем, связанных с использованием DGS под названием «Преподавание и изучение геометрии 11-19». В докладе рекомендовано, чтобы учебная программа по геометрии позволила достичь следующих целей:

- развивать пространственное понимание, геометрическую интуицию и способность визуализировать;
- обеспечивать широту геометрических опытов в 2D и 3D измерениях;
- развивать знания, понимание и возможность использования геометрических свойств и теорем;
- поощрять творческую деятельность и выдвижение гипотезы, дедуктивного рассуждения и доказательства;
- развивать навыки применения геометрии через решение проблем и моделирования в реальных условиях;
- разрабатывать полезные информационные и коммуникационные технологии (ИКТ) для геометрии;

- формировать положительное отношение к математике и развивать знания о историческом и культурном наследии геометрии в обществе, а также о современном применении геометрии [170].

Популярность ИГС как средства учебной деятельности в настоящее время нарастает, о чем свидетельствует постоянный рост количества публикаций, посвященных использованию ИГС в обучении геометрии. На рисунках 1-3 представлены графики, иллюстрирующие зависимость количества публикаций (ось ординат) от года (ось абсцисс).

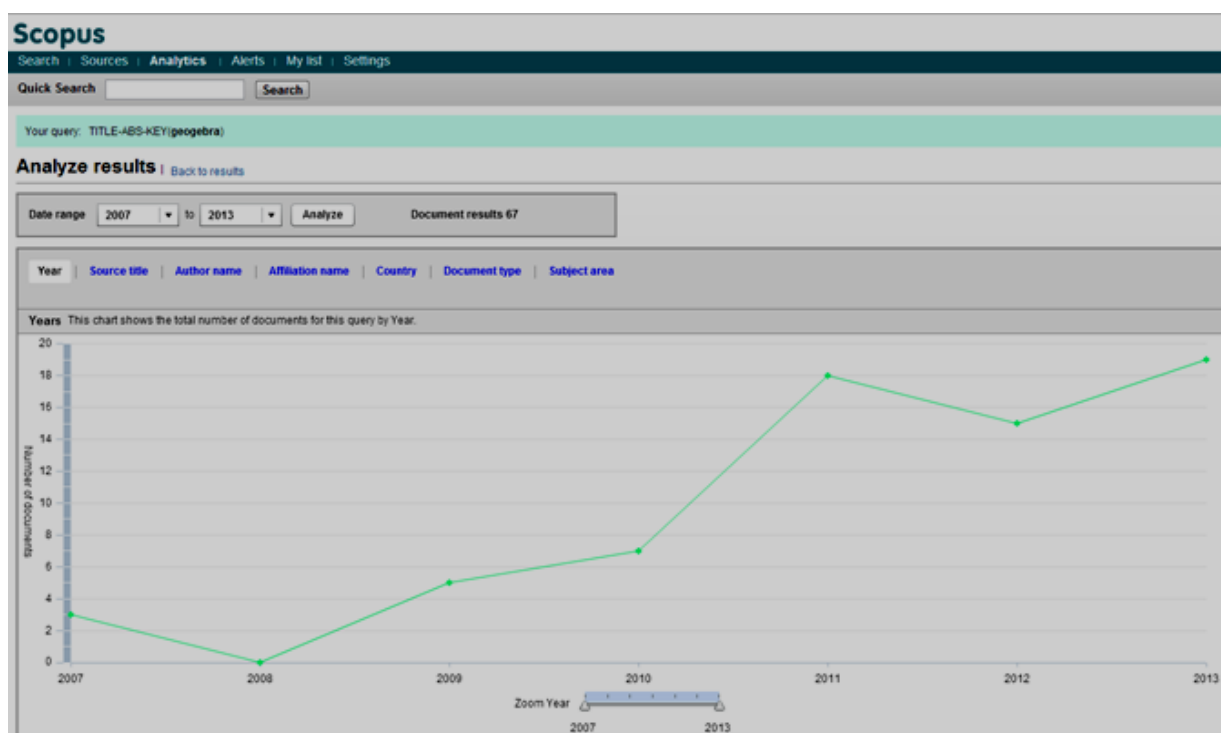


Рисунок 1. Публикации об использовании DGS GeoGebra

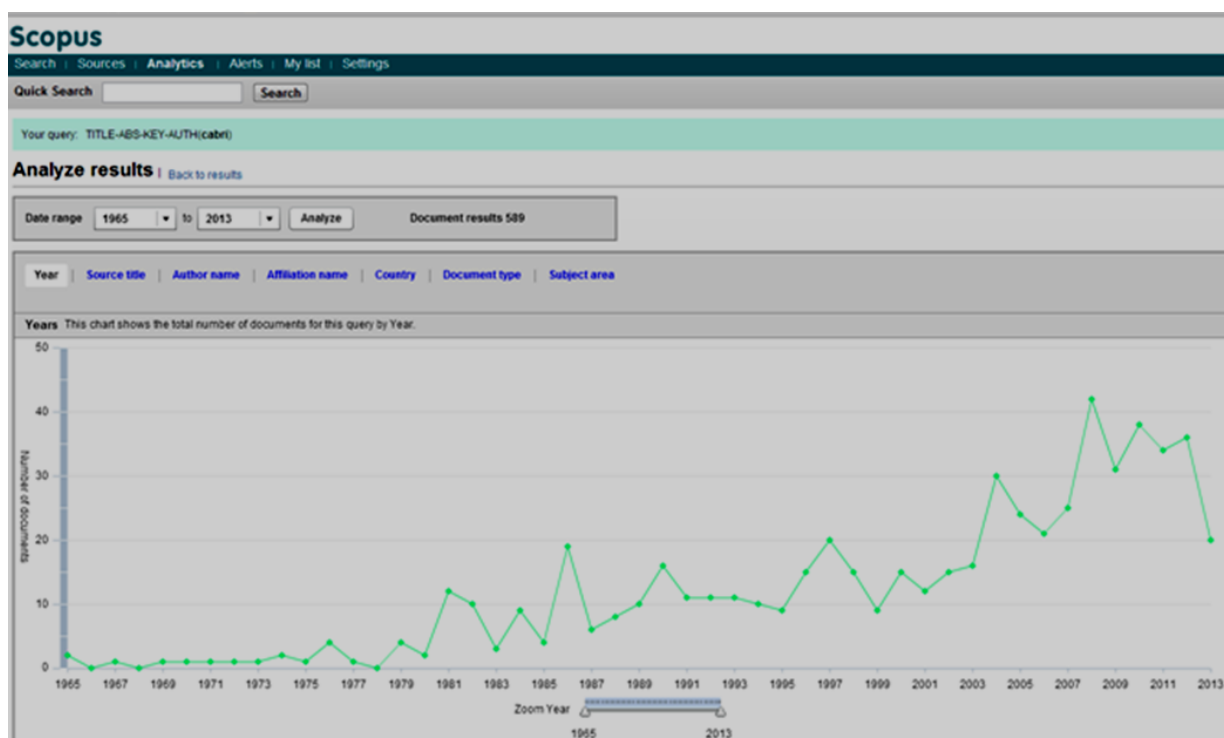


Рисунок 2. Публикации об использовании DGS Cabri

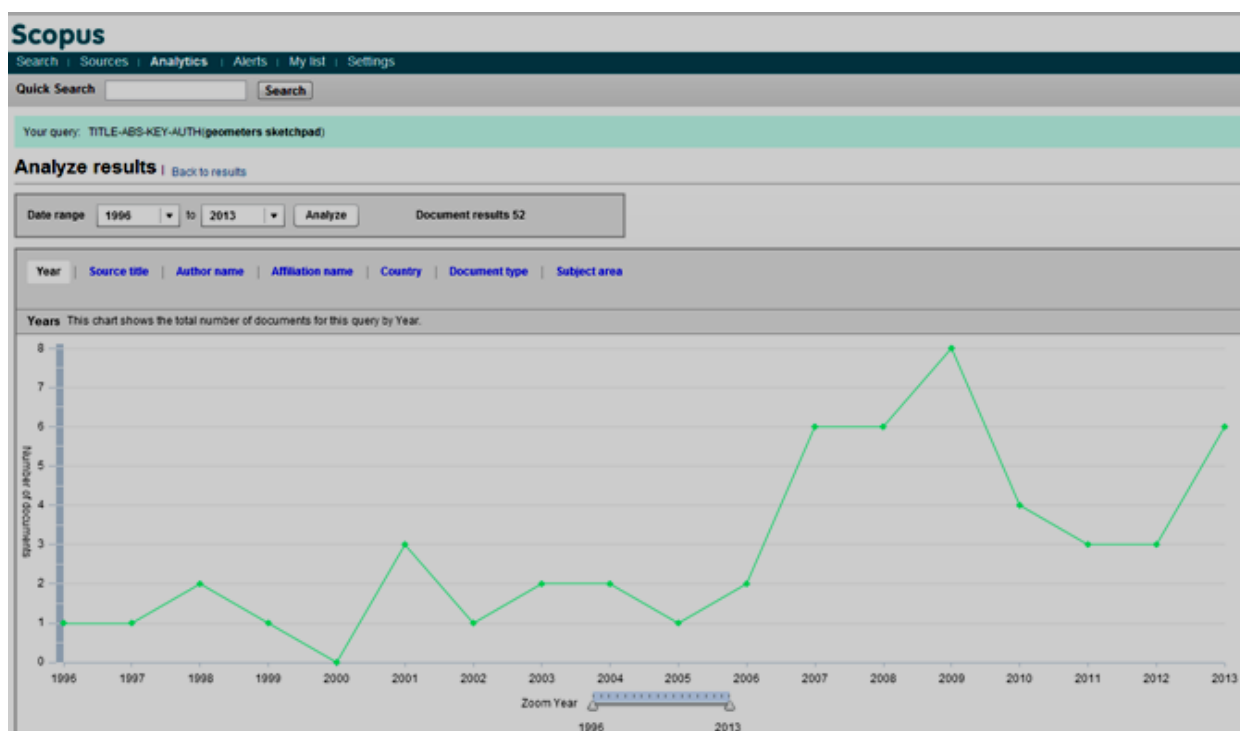


Рисунок 3. Публикации об использовании DGS «The Geometr's Sketchpad»

Представленные данные показывают, что привлечение к процессу обучения геометрии ИГС и динамических листов, создаваемых на их основе, могут оказать как положительные, так и отрицательные влияния на результаты обучения.

Наше исследование направлено на ликвидацию или, по крайней мере, снижение остроты отрицательных эффектов, получивших в научной литературе обобщенное название «Экспериментально-теоретический разрыв».

Выводы по параграфу.

На основе анализа литературы были выделены шесть основных периодов в истории информатизации геометрического образования (см. таблицу 3):

Таблица 3.

Период	Основные задачи информатизации образования	Вклад в геометрическое образование
1981 ² -1984	Создание и включение микрокалькуляторов (МКШ) в комплект учебного оборудования	МКШ используется для упрощения вычислений, для подведения к гипотезам
1985 ³ -1993	Определение принципов создания обучающих систем и перспектив от их внедрения	Поставлена задача динамизации математических объектов, которая позволит приблизить учебный процесс к исследованию и эксперименту
1993 ⁴ -2000	Создание обучающих систем программных продуктов образовательного назначения.	Показана возможность создания и использования предметно-ориентированных сред для формирования геометрических понятий, развития пространственного мышления, сближения процесса обучения с исследовательской деятельностью. Введены в теорию и методику обучения математике понятия «компьютерный эксперимент», «компьютерная демонстрация», «компьютерная модель геометрической фигуры».
2001 ⁵ -2005	Разработка компьютерных инструментов поддержки учебной деятельности	Разработан 21-С: Математический конструктор. Популяризация использования его и других DGS в процессе обучения геометрии
2006 ⁶ -2010	Создание электронных информационно-образовательных ресурсов, развитие, оптимизация и модернизация управления системой федеральных образовательных порталов	Разработка технологий и методик обучения геометрии с использованием электронных образовательных ресурсов (ЭОР)
С 2011 ⁷ по настоящее время	Подготовка к переходу на использование возможностей новых ИТ	В ФГОС сформулированы требования к результатам обучения и использования компьютерных средств поддержки

²Приказ министра просвещения СССР от 30.12.1981 года об утверждении типового перечня учебно-наглядных пособий и учебного оборудования для общеобразовательных школ.

³Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 28 марта 1985 года № 271 «О мерах по обеспечению компьютерной грамотности учащихся средних учебных заведений и широкого внедрения электронно-вычислительной техники в учебный процесс»

⁴Программа информатизации образования в Российской Федерации на 1994-1995 г.г., Инфо, №6, 1993, с.8-23.

⁵Постановление Правительства РФ от 28 августа 2001 г. № 630 об утверждении ФЦП «Развитие единой образовательной информационной среды (2001-2005 годы)».

⁶Постановление Правительства РФ от 23 декабря 2005 г. №803 об утверждении ФЦП развития образования на 2006-2010г.г. Задача: «совершенствование содержания и технологий образования».

		геометрической деятельности. Создаются электронные приложения ко всем базовым учебникам геометрии. Апробация методик, оценка эффектов и рисков.
--	--	---

Анализ данных об эффектах и рисках от введения DGS в систему средств обучения геометрии учащихся основной школы показал, что наиболее острой проблемой является «экспериментально-теоретический разрыв», под которым понимается тенденция к отказу большинства учителей и учащихся от использования дедуктивных рассуждений при проверке истинности геометрических утверждений, открытых методом компьютерного эксперимента в DGS, из-за высокой убедительности динамического чертежа.

Наше исследование направлено на ликвидацию или, по крайней мере, снижение остроты именно этого отрицательного эффекта.

1.2. Анализ российского и зарубежного опыта использования компьютерного эксперимента при изучении основных теорем планиметрии в школе

Основными дидактическими единицами курса геометрии основной школы являются теоремы. Они занимают особое место в содержании обучения, в связи с тем, что:

- через совокупность теорем раскрывается содержание геометрических понятий;
- теоремы составляют теоретическую основу решения геометрических задач;
- теоремы представляют собой наиболее значимые результаты деятельности математиков.

Именно освоение образцов деятельности математиков является наиболее значимым результатом общего геометрического образования с позиций деятельностного подхода, который развивается в трудах Л.С. Выгодского, В.В. Давыдова, О.Б. Епишевой, Н.Х.Розова, М.В. Шабановой и др. [20, 30, 94, 130]. «Умение понимать умозаключения других людей, умение конструировать собственные умозаключения и последовательности умозаключений, умение формулировать суждения на основе произведенных умозаключений – все это неотъемлемые элементы общей культуры человека, значение которых выходит далеко за рамки математики» [44, с.4].

⁷ Постановление Правительства РФ от 7 февраля 2011 г. №163-р об утверждении ФЦП развития образования на 2011–2015 годы.

Изучение теорем предоставляет большие возможности для ознакомления учащихся с лучшими образцами деятельности геометров от постановки задачи исследования геометрического объекта до доказательства математического утверждения, полученного в результате этого исследования, оценки его значимости для решения других задач и возможности дальнейшего движения в выбранном направлении познания [139].

Наиболее продуктивными в этом смысле являются основные теоремы планиметрии. Список таких теорем определялся неоднократно многими авторами в связи с разными причинами: выделение инвариантного ядра школьного курса планиметрии (В.А. Гусев), повышение развивающего потенциала (И.Ф. Шарыгин), выделение теоретической основы, обеспечивающей успешное освоение школьного курса стереометрии (Е.В. Потоскуев), выделение теорем, изучение которых позволит познакомить учащихся с наиболее значимыми методами, приемами, способами доказательств (А.В. Ястребов).

Характером этих причин определяется и название такого перечня. Так, например, Е.В. Потоскуев назвал составленный им список «рабочие теоремы планиметрии», которые наиболее часто, по его мнению, используются при решении стереометрических задач. Данный список включает в себя 21 теорему и приводится в приложении к задачнику по стереометрии для учащихся 10-11 класса [89].

Для усиления развивающего потенциала курса геометрии И.Ф. Шарыгин включил в материал учебника [136] ряд дополнительных утверждений в форме задач на доказательство, с пометкой «важные», «полезные» и «творческие». К числу полезных задач относятся, например, задачи «Если вписанный в окружность угол опирается на диаметр, то градусная мера его 90° », «Катет прямоугольного треугольника, лежащий против 30° равен половине гипотенузы»; а к числу творческих-, например, задача «Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на прямые AB, BC и CA, лежат на одной прямой (Эта прямая носит название прямой Симпсона)». Необходимость таких дополнений он обосновывает следующим образом: «Необходимо вернуть в

школьную геометрию...некоторые малоизвестные факты из классических разделов геометрии треугольника и окружности, замечательные, незаслуженно забытые достижения старых мастеров...их введение может резко повысить развивающий потенциал школьной геометрии»[137, с.21].

В связи с большой значимостью теорем, как содержательной основы формирования у учащихся опыта геометрической деятельности, методика работы с ними детально регламентирована и приближена по своей структуре к этапам гносеологического цикла научного познания (В.А. Гусев, В.А. Далингер, В.И. Мишин, Е.В. Потоскуев, Г.И. Саранцев, А.А. Столяр, А.В. Ястребов и др.). Несмотря на то, что выделяемые авторами этапы несколько отличаются, неизменным остается следующий их перечень:

1. Постановка проблемы (мотивация изучения теоремы);
2. Выдвижение гипотезы (ознакомление с фактом теоремы или подведение к открытию);
3. Проверка, доказательство, опровержение гипотез (выделение условия и заключения теоремы, иначе усвоение содержания теоремы; построение аналитического рассуждения; проведение доказательства);
4. Развитие теории и практики на основе полученного знания (применение теоремы; установление связей изучаемой теоремы с другими теоремами; составление новых задач, вытекающих из доказанного утверждения).

В связи с информатизацией геометрического образования, ряд представленных этапов методики работы с теоремой все чаще реализуется с использованием компьютерного эксперимента [25, 26, 99, 100, 101]. Значимость привлечения компьютерной техники к обучению геометрии признается даже авторами школьных учебников. Так, например, И.Ф. Шарыгин в статье [137] отметил, что «...компьютер является очень полезным инструментом в геометрических исследованиях. С его помощью можно экспериментально обнаруживать новые интересные геометрические факты. Человеку же остается важнейшая роль - эти факты доказывать (всего лишь!). При этом в геометрическую деятельность с использованием компьютеров могут включаться

школьники и сильные и слабые (с точки зрения математики), технари и гуманитарии» [137, с. 15].

Решение вопросов, связанных с уточнением роли и места компьютерного эксперимента в методике работы с теоремой требует предварительного раскрытия смысла данного термина.

Сам термин введен в методическую науку из информатики в связи с решением задачи информатизации образования.

В учебниках Информатики [12, 13, 105] и научной литературе [68, 78, 70, 138, 34, 36, 135] специфика данного понятия раскрывается на основе противопоставления понятию натурального эксперимента. При этом под натурным экспериментом понимается вмешательство исследователя в естественный ход событий в процессе их познания. Таким образом, «в натурном эксперименте участникам учебного процесса противостоит фрагмент материальной действительности во всей неисчерпаемости ее свойств» [113, с.5]. Это определение позволяет рассматривать компьютерный эксперимент как разновидность модельного, где заменителем реального объекта или процесса выступает виртуальная модель. Эту точку зрения на специфику компьютерного эксперимента разделяют большинство авторов: В.Д. Боев, А.Ю. Иванова, М.Н. Марюков, И.Б. Петров, Р.П. Сыпченко, М.И. Старовиков, Д.Э. Темнов и др. В подтверждение сказанному приведем несколько предлагаемых ими определений.

Иванова А.Ю. в [34, с.4] определяет компьютерный эксперимент как «Модельный эксперимент, основу которого составляет манипулирование по определенному плану с виртуальными моделями систем и процессов с целью прогнозирования поведения прототипов этих моделей».

Боев В.Д. и Сыпченко Р.П. [6] дают следующее определение: «Компьютерный эксперимент представляет собой процесс использования модели с целью получения и анализа интересующей исследователя информации о свойствах моделируемой системы».

В пособии [119] эксперимент рассматривается как «...опыт, который производится с объектом или моделью, состоящий в воздействии на изучаемый

объект посредством специальных инструментов и приборов. В процессе эксперимента устанавливается реакция объекта на все эти воздействия».

«Компьютерный эксперимент» Марюковым М.Н. [57, с.40] трактуется как способ получения истины, который предшествует строгому математическому доказательству.

Однако существует и другая точка зрения, получившая распространение в связи с разработкой и широким использованием при проведении экспериментов цифровых датчиков сбора данных. Здесь возможности компьютера ограничены манипулированием с экспериментальными данными, которые хранятся в электронной таблице. Этой точки зрения придерживаются А.Г. Гейн, И.Г. Семакин, Л.В. Пигалицын и др. Приведем описание компьютерного эксперимента, относящееся к данному подходу. Компьютерный (вычислительный, расчетный) эксперимент— это «...эксперимент с данными о результатах наблюдения за поведением изучаемой системы, хранящихся в электронных таблицах, с целью прогнозирования поведения данной и аналогичной ей систем за пределами области наблюдений» [12, с.68].

Существуют и компромиссные точки зрения, которые как содержательно, так и терминологически разводят представленные подходы к пониманию компьютерного эксперимента. Так, Р.М. Чудинский вводит термин *компьютеризированного эксперимента*. Его он определяет, как «представляющий собой натурный эксперимент с использованием персонального компьютера с внешними дополнительными устройствами сопряжения». Эксперименты, проводимые с виртуальными моделями, он считает *компьютерными модельными экспериментами*. Это эксперимент «над идеальной моделью изучаемого объекта, явления, процесса или системы, реализуемый с помощью персонального компьютера» [129, с.70].

Термин «компьютерный эксперимент» он считает целесообразным закрепить за экспериментами второго типа, так как именно там возможности компьютерной техники используются более полно. В связи с этим он считает целесообразным представлять компьютерный эксперимент состоящим из двух

составных частей, в которых компьютер выполняет принципиально разные функции: 1) моделирующую; 2) измерительную и управляющую.

Проведенный нами анализ смысловых значений, приписываемых термину «компьютерный эксперимент» позволяет нам использовать полученные данные для раскрытия смысла данного понятия в рамках теории и методики обучения математике (в частности, геометрии).

Компьютерный эксперимент, проводимый средствами DGS (в обучении геометрии) (КЭ) – это разновидность модельного эксперимента, в котором в качестве объекта изучения выступает динамический чертеж (модель) геометрической конфигурации.

Подобное толкование понятия компьютерного эксперимента полностью согласуется со смысловым контекстом, который задается разными авторами при описании использования данного метода обучения в школьном курсе геометрии [144, 150]. Проиллюстрируем это рядом примеров таких описаний.

Пример 2: В [21] В.А. Далингер использует термин КЭ в следующем контексте: «Большое значение имеет компьютер в *обучении доказательству теорем*. В учебниках геометрии все теоремы предлагаются учащимся в готовом виде [14, 15, 38, 42, 46, 48, 61, 62, 63, 66, 109]. Компьютер же позволяет поставить каждого школьника в условия первооткрывателя теоремы. Это можно сделать в форме «компьютерного эксперимента» [21, с.74]. Свою мысль он поясняет примером методики работы с теоремой: «Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды».

«Учащемуся на экране дисплея предлагается рисунок (рис. 4) и указываются длины отрезков AE , BE , DE , CE .

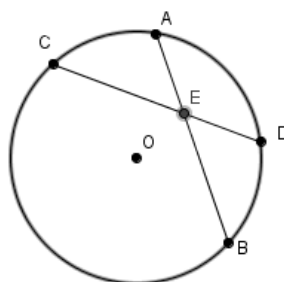


Рисунок 4.

Школьники должны произвести над этими длинами поочередно четыре арифметические операции. Затем *рисунок меняется* (на экране для той же окружности чертятся другие хорды) и указываются длины новых полученных отрезков. Ребята проделывают над ними те же операции. Эти операции повторяются до тех пор, пока ученик не подметит нужную закономерность, которую он должен ввести в компьютер в форме: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Если подмеченная закономерность соответствует «открываемой» теореме, то компьютер подтверждает это, в противном случае ученику предлагается ещё несколько вариантов чертежей...» [21, с.73].

Представленный пример показывает, что для целей проведения компьютерного эксперимента могут быть использованы виртуальные модели, представленные серией изображений геометрических объектов на экране компьютера - *статических чертежей* (статических моделей). Такие модели являются заместителями материальных моделей геометрических объектов, которые могут быть представлены аналогичными сериями изображений на бумаге или изготовлены из различных материалов (проволочные каркасные модели, картонные модели и др.).

Более полно возможности компьютерного эксперимента раскрываются при другом подходе к построению виртуальных моделей геометрических объектов. В рамках его реализации серия статических виртуальных моделей заменяется *виртуальной динамической моделью*, допускающей бесконечное количество преобразований. Пример проведения КЭ с использованием такой модели также можно найти у В.А. Далингера [21, с.74] применительно к решению задач на доказательство.

Пример 3. «Доказать, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению большей и меньшей из его диагоналей.

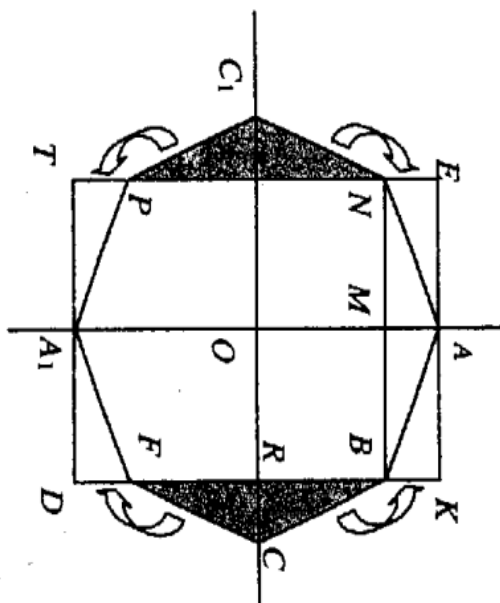


Рисунок 5.

Доказательство. Проведем оси симметрии заданного правильного восьмиугольника AA_1 и CC_1 . Проведем также $EK \perp AA_1$ и $KD \perp CC_1$. Тогда EK равна наименьшей диагонали восьмиугольника, а KD – наибольшей. Путем перекладывания треугольников (способом, указанным на рис.3) получаем, что $S_{ABCFA_1PC_1N} = S_{EKDT} = EK \cdot DT$. Что и требовалось доказать. Доказательство проводится на компьютере посредством соответствующих поворотов четырех треугольников.

Замечание. Указанное в доказательстве перекладывание треугольников возможно, если соответствующие треугольники равны (в силу симметрии достаточно показать это для одной пары треугольников)» [21, с.76].

Представленный пример иллюстрирует, что *виртуальные динамические модели* значительно расширяют возможности компьютерных экспериментов. Они позволяют не только наводить на открытие геометрических фактов, но и убеждать в их истинности за счет демонстрации *динамической устойчивости* свойств геометрических объектов, т.е. инвариантности изучаемых свойств относительно изменения взаимного расположения элементов, задающих геометрическую конфигурацию, а также относительно изменений значения параметра на множестве допустимых значений.

Под динамизацией модели при этом понимается «...процесс исследования математических объектов и их структур с помощью изменения базисных

элементов или определяющих их параметров, установление функциональных связей и инвариантов» [18].

Возможности демонстрации динамической устойчивости свойств виртуальных моделей могут быть использованы не только для изучения свойств геометрических фигур, но и понятий более высокого уровня абстракции, например, геометрических преобразований. Так, авторы статьи [11] описывают использование компьютерного эксперимента для подведения учащихся к открытию групповых свойств движения.

Пример 4. Провести серию компьютерных экспериментов с виртуальной моделью треугольника для поиска свойств фигур, не зависящих от выбора вида движения, связывающего эти фигуры.

«...Варьирование видов движений обеспечивается динамичностью одного из концов вектора, задающего преобразование: параллельный перенос, поворот, центральную симметрию (рис.5).

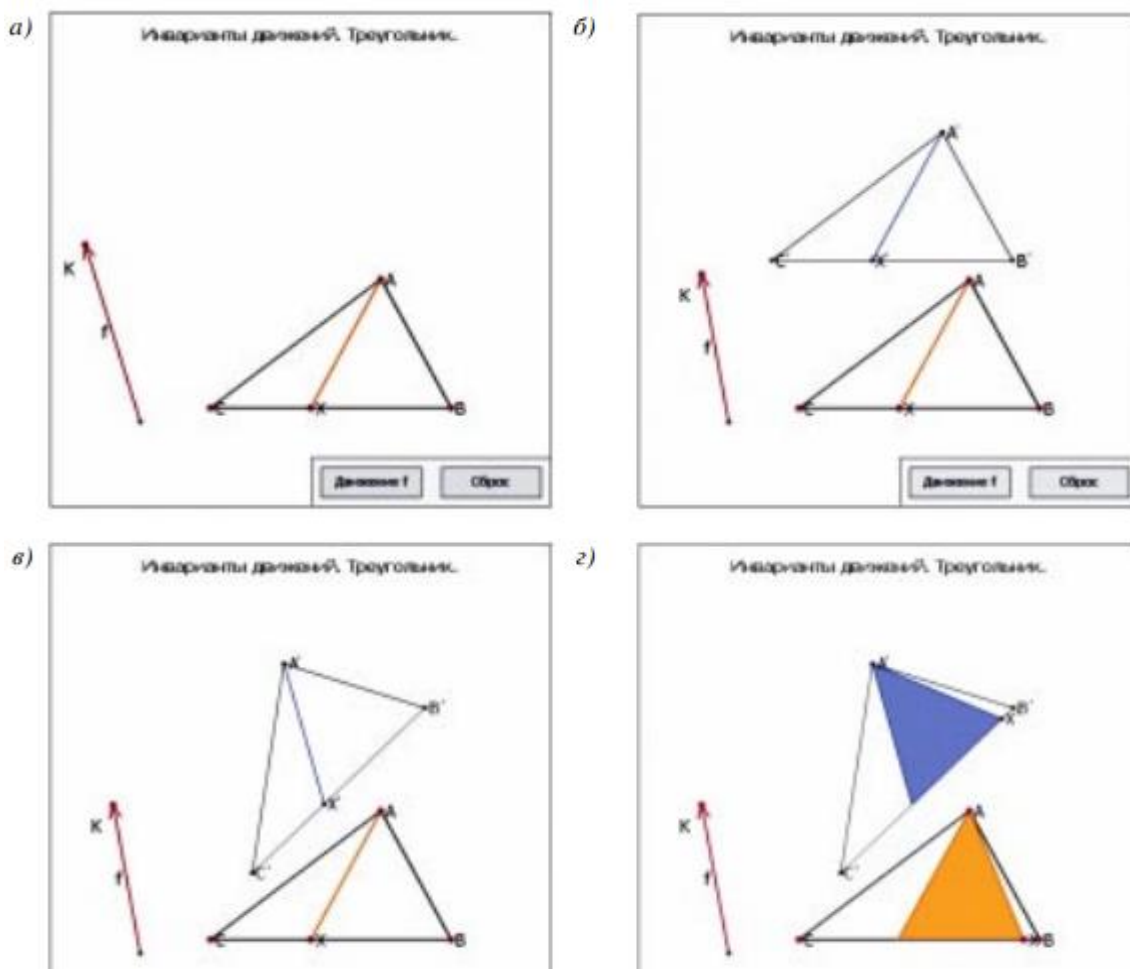


Рисунок 5.

В начальном состоянии в окне модели изображён исходный треугольник ABC и точка X на стороне BC (рис. 5а). Вершины треугольника можно перемещать произвольно, а точку X вдоль стороны BC (при этом закрашивается соответствующая область треугольника). В левой части окна изображён вектор с вершиной K, задающий некоторое движение f . Точка K является активной. С ее помощью можно изменять направление этого движения. При нажатии кнопки «Движение f » точки A, B и C переводятся соответственно в точки A', B' и C' (рис. 5б). При этом в окне модели появляется образ треугольника A'B'C', который можно произвольным образом вращать курсором мыши (рис. 5 в). Этим же движением f отрезки AX переводятся в отрезки A'X', заполняющие треугольник A'B'C'. Этот процесс можно наблюдать в интерактивном режиме, перемещая активную точку X вдоль стороны BC (рис. 5 г). Кнопка «Сброс» в правом нижнем углу окна возвращает модель в исходное состояние» [11, с.20].

Компьютерные эксперименты, проводимые с динамическими моделями, по мнению Е.М. Гуреева, могут быть использованы и для материализации логических действий (визуализации в терминологии В.А. Далингера).

Приведем конкретный пример использования этих возможностей компьютерного эксперимента. О.А. Боровкова [7] описывает компьютерный эксперимент, подводящий учащихся к открытию идеи доказательства теоремы о площади параллелограмма (рис.6).

Пример 5. Экспериментируя с динамической моделью параллелограмма, найдите способ его разрезания, позволяющий заменить параллелограмм равносоставленным ему прямоугольником.

Тема. Площадь параллелограмма

Мы умеем находить площадь прямоугольника:

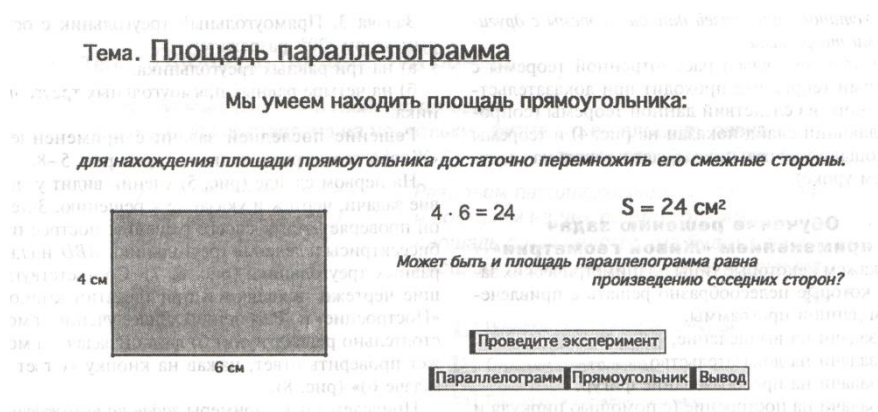
для нахождения площади прямоугольника достаточно перемножить его смежные стороны.

$4 \cdot 6 = 24$ $S = 24 \text{ см}^2$

Может быть и площадь параллелограмма равна произведению соседних сторон?

Проведите эксперимент

Параллелограмм **Прямоугольник** **Вывод**



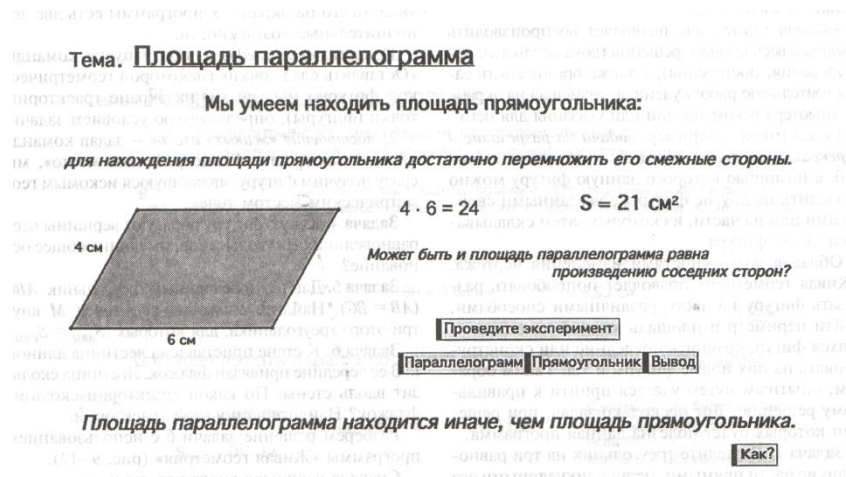


Рисунок 6.

А.В. Серeda [107] пишет: «Главной идеей применения на уроках любой программы, реализующей идеи динамической геометрии, является "открытие" учащимися геометрических закономерностей, возможность проведения **компьютерного геометрического эксперимента**... При варьировании динамического чертежа гораздо легче выделить те свойства рассматриваемой конфигурации, которые являются неизменными, т.е. следствия условий, накладываемых на исходную фигуру, – например, заметить, что какие-то прямые всегда параллельны или какие-то отрезки равны. Компьютерный эксперимент может подсказать решение задачи, а может помочь опровергнуть какие-то предположения, кажущиеся вполне правдоподобными».

Пример 6: Дан параллелограмм ABCD, у которого $AB = 1$, $BC = 2$, а угол ABC является тупым. Через каждую из точек B и D проведены две прямые, одна из которых перпендикулярна стороне AB, а другая – стороне BC. При пересечении этих прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму ABCD. Найти площадь параллелограмма ABCD.

«...Выполним чертёж, исходя из условия задачи.

Пусть $BE \perp AD$, $BG \perp CD$, $DF \perp BC$, $DH \perp AB$. Обозначим через M точку пересечения прямых BE и DH, а через N – точку пересечения прямых BG и DF. Получаем вполне правдоподобный чертёж (рис. 7).

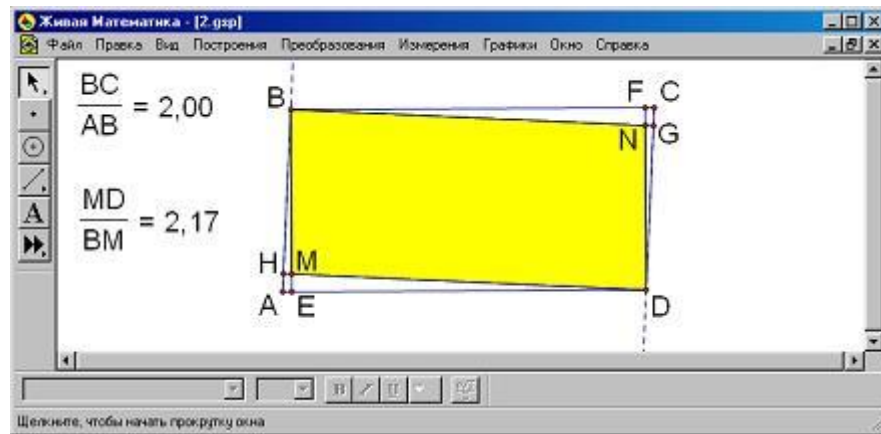


Рисунок 7.

Однако пытаясь перемещением точки В подобрать такое значение угла BAD , чтобы выполнялось требование подобия параллелограммов $ABCD$ и $BMDN$, мы обнаруживаем, что это возможно только, если $BAD = 90^\circ$, что противоречит условию задачи. Таким образом, рассматриваемая конфигурация невозможна.

В пособии [107] приведены аналитические рассуждения в обоснование данного заключения. Компьютерный эксперимент позволяет учащимся сделать аналогичный вывод быстрее, нагляднее, вне зависимости от уровня математических способностей.

Возникает впечатление, что условие задачи противоречиво, поэтому она не имеет решения. На самом деле просто невозможна ситуация, когда точки H и G принадлежат сторонам параллелограмма $ABCD$. Уменьшая острый угол при основании исходного параллелограмма $ABCD$, мы обнаруживаем, что точки пересечения перпендикуляров к его сторонам (точки M и N) могут оказаться вне параллелограмма (рис.7'), и именно эта ситуация удовлетворяет всем условиям задачи.

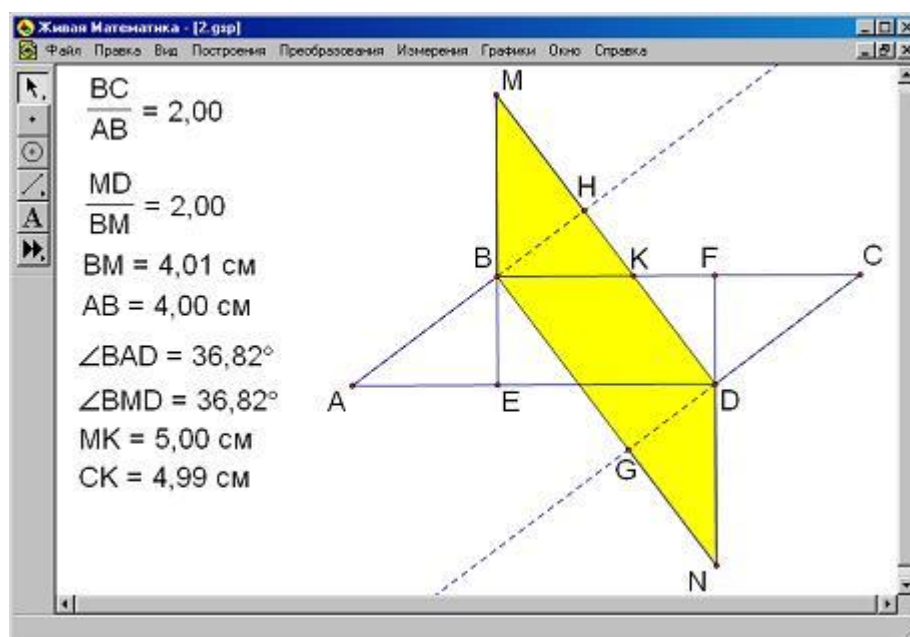


Рисунок 7'.

Продолжив работу с динамическим чертежом, замечаем, что $AB = BM$, т.е. параллелограммы $ABCD$ и $BMDN$ оказываются равны. Конечно, эти подмеченные нами на чертеже особенности – лишь весьма основательные гипотезы. Для того, чтобы они стали фактом, их следует доказать, но компьютерный эксперимент позволяет наметить план дальнейших исследований. Полное решение этой весьма трудной и поучительной задачи приведено в пособии [107, с.3]».

Представленные примерами образовательные функции компьютерного эксперимента, основанного на построении динамической модели, описаны во вводной статье серии «1С: Математический конструктор» В.А. Дубровского [25]: «... глядя на изменяющийся чертеж, можно выделить те его свойства, которые сохраняются при вариации, то есть следствия условий, накладываемых на рассматриваемую фигуру, — например, легко увидеть, что какие-то прямые всегда параллельны или какие-то отрезки равны. Благодаря этому модель становится и инструментом для геометрических открытий, и замечательным педагогическим средством: смоделировав подобный *эксперимент* заранее, учитель может подвести учеников к самостоятельному осознанию той или иной идеи. Да и сам процесс построения гораздо более поучителен в его компьютерном варианте, т.к. требует от ученика полного понимания алгоритма построения и точности его исполнения – машину не обманешь»[25, с.15].

Целесообразное использование этих образовательных функций компьютерного эксперимента, основанного на идее динамического моделирования, существенно меняет не только технологию, но и содержательную основу школьного курса геометрии. Именно поэтому в статьях этих авторов часто звучит термин «динамическая геометрия», который подчеркивает необходимость выявления содержательных различий с геометрией «статической», которая является традиционной для школьного курса математики.

Приведем пример использования компьютерного эксперимента с целью обнаружения условий существования геометрических фигур, заданных набором элементов [2, с.9].

Пример 7: С помощью компьютерного эксперимента выясните условия существования треугольника, заданного двумя сторонами и медианой, проведенной к одной из них. После выполнения необходимых построений в «Живой геометрии» получается «живая» модель (рис. 8).

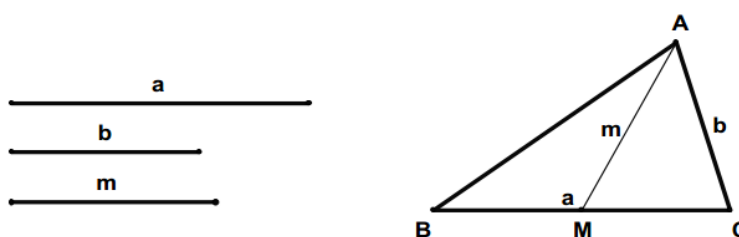


Рисунок 8.

Потянув мышкой за конец одного из данных отрезков, можно наблюдать за тем, что происходит с соответствующей компьютерной моделью треугольника ABC. Одновременно на экране можно высветить соответствующие длины не только данных отрезков, но и значения любых функций, заданных на них. Так, например, при увеличении длины отрезка m угол при вершине C будет постепенно «разворачиваться» (рис. 8'),

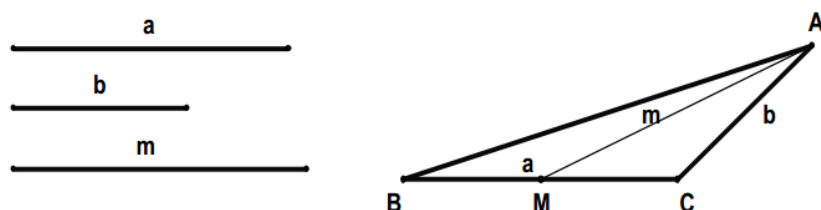


Рисунок 8'.

и при достижении медианой значения $a/2 + b$ треугольник выродится в отрезок. В результате такого исследования у студента должна появиться гипотеза о том, что если $m < a/2 + b$ или $m > |a/2 + b|$, то задача решения не имеет. Очень важным является понимание студентом того, что это еще не доказательство. Для того чтобы подтвердить гипотезу, необходимо воспользоваться соответствующими теоремами планиметрии, в нашем случае неравенством треугольника» [2, с.12].

Еще одним достоинством компьютерных экспериментов является возможность развития идеи задачи или доказанного утверждения за счет внесения тех или иных изменений в план проведения эксперимента или исходный объект исследования (получение модификации его виртуальной модели). И.С. Храповицкий [128] (учитель математики) пишет: «Изменять фигуру в соответствии со своим желанием естественно выводить геометрические представления ученика и его сознание из статического состояния. Мыслению чужда статика». Рассмотрим пример открытия теоремы Пифагора, а затем пример дальнейшего развития её идеи в ходе исследования методом компьютерного эксперимента зависимости характера связи площадей квадратов, построенных на сторонах треугольника, от вида треугольника (заметим, что методический подход может быть реализован и без использования компьютера см. [152, 153]).

Пример 8: На сторонах произвольного треугольника во внешнюю часть построить квадраты и определить вид треугольника, для которого сумма площадей двух меньших квадратов является равной площади большего квадрата.

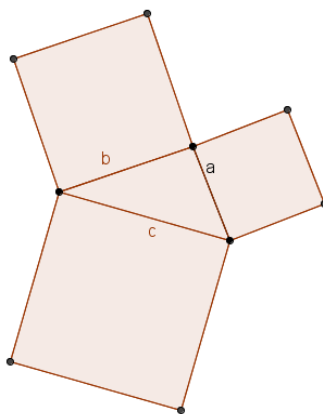


Рисунок 9.

Если изменять треугольник (зацепив мышкой одну из его вершин), то можно проследить за изменением суммы $a^2 + b^2$ и сравнить ее с c^2 . Когда будет достигнуто равенство $a^2 + b^2 = c^2$, треугольник станет прямоугольным.

Пример 9: Используя модель из примера 8, придумать и провести компьютерный эксперимент, позволяющий по соотношению площадей, построенных на сторонах треугольника, определять его вид.

«Отрежем» от большего из них два прямоугольника, равновеликие меньшим квадратам (рис.10). Если изменять треугольник (зацепив мышкой одну из его вершин), то можно проследить за изменением суммы $a^2 + b^2$ и сравнить ее с c^2 . Если $a^2 + b^2 > c^2$, как на рисунке, то треугольник, как видим (и докажем!), - тупоугольный; при $a^2 + b^2 < c^2$, то треугольник станет остроугольным, а в случае $a^2 + b^2 = c^2$ - прямоугольным. Трудно представить более наглядную интерпретацию следствия из теоремы косинусов!» [128, с.17].

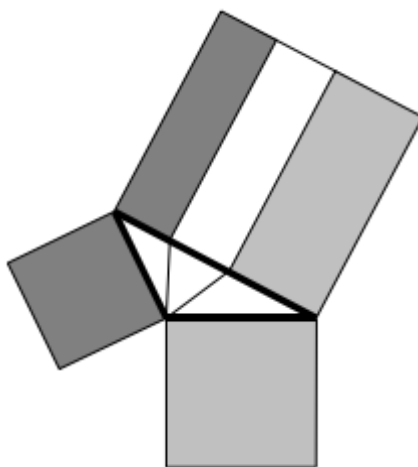


Рисунок 10.

Пример 10. Используя результат эксперимента из примера 9, исследуйте, может ли служить признаком вида треугольника соотношение площадей не только квадратов, построенных на его сторонах, но и любых других правильных многоугольников.

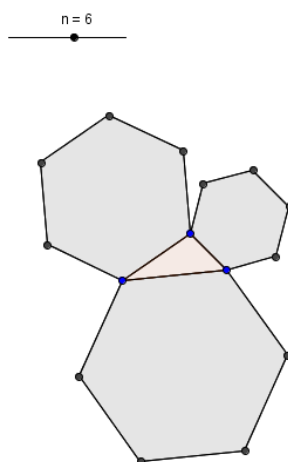


Рисунок 11.

Например, построим на сторонах треугольника правильные n -угольники, где n - параметр, заданный с помощью инструмента «ползунок». После получения прямоугольного треугольника приступим к изменению параметра n . Эксперимент показывает, что при этих изменениях равенство площадей не изменяется. Получаем обобщение теоремы Пифагора на случай любых правильных многоугольников, построенных вне его на сторонах прямоугольного треугольника. Дополнительно можно проверить, как изменится соотношение сумм площадей правильных n -угольников, при изменении вида треугольника.

Многие исследователи в области использования DGS отмечают, что компьютерные эксперименты, проводимые с использованием динамической модели, являются хорошим средством для проверки выдвинутых гипотез [131, 133]. Приведем в подтверждение пример такого использования компьютерного эксперимента И.С. Храповицким [127].

Пример 11. В окружности проведены два диаметра, и из её свободной точки M опущены два перпендикуляра на диаметры, их основания соединены отрезком AB . Покажите, что:

- 1) длина отрезка AB не зависит от места положения точки M на окружности;
- 2) длина отрезка AB не зависит от взаимного расположения диаметров;
- 3) значимым для сохранения длины отрезка AB является принадлежность точки M окружности.

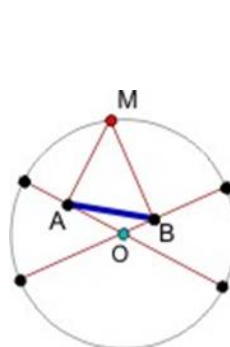


Рисунок 12.

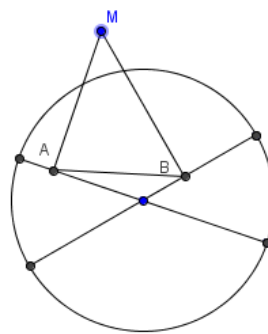


Рисунок 12'.

Для проверки первого утверждения необходимо задать M на окружности с помощью инструмента «точка на объекте». Двигая точку M (зацепив мышкой), убеждаемся в том, что длина отрезка AB не зависит от места положения точки M на окружности (рис.12).

Для проверки второго утверждения нужно изменять угол между хордами (зацепив мышкой конец одного из диаметров). Учащиеся убеждаются, что длина отрезка AB не зависит от взаимного расположения диаметров.

Для проверки третьего утверждения необходимо задать M произвольно. Двигая точку M (зацепив мышкой), убеждаемся в том, что длина отрезка AB зависит от места положения точки M только в случае нахождения точки M на окружности, длина отрезка AB становится неизменной величиной (рис.12').

В ходе компьютерной проверки может быть выявлена необходимость уточнения ранее сформулированного утверждения или сделан обоснованный выбор рабочей гипотезы, т.е. наиболее правдоподобной гипотезы из нескольких альтернатив. Приведем пример Т.М. Барковой [107] использования компьютерного эксперимента.

Пример 12. На окружности выбрана точка M . Провести хорду AB параллельно касательной к окружности в точке M . Треугольник ABM будет иметь наибольшую площадь, если а) треугольник ABM — прямоугольный; б) треугольник ABM — равносторонний; в) ни в одном из указанных случаев.

«Создадим модель для исследования данной задачи (рис. 13). Очевидно, что положение точек A и B на окружности определяется значением угла AMB . Площадь треугольника ABM можно измерить, предварительно выполнив построение внутренней области треугольника. Чтобы легче было наблюдать за

изменением значения площади треугольника АВМ при движении точки А по окружности, представим зависимость между значением угла АМВ и соответствующей этому значению площадью треугольника в графическом виде. Для этого построим в декартовой системе координат точку К, координатами которой будут измеренные значения угла и площади, а затем применим к этой точке команду Геометрическое место при изменении положения точки А. На чертеже появится график соответствующей зависимости, имеющий единственную точку максимума. Эмпирически убеждаемся, что точка К попадает в точку максимума при условии, что $\angle AMB = 60^\circ$, т.е. наибольшая площадь будет у равностороннего треугольника АВМ.»

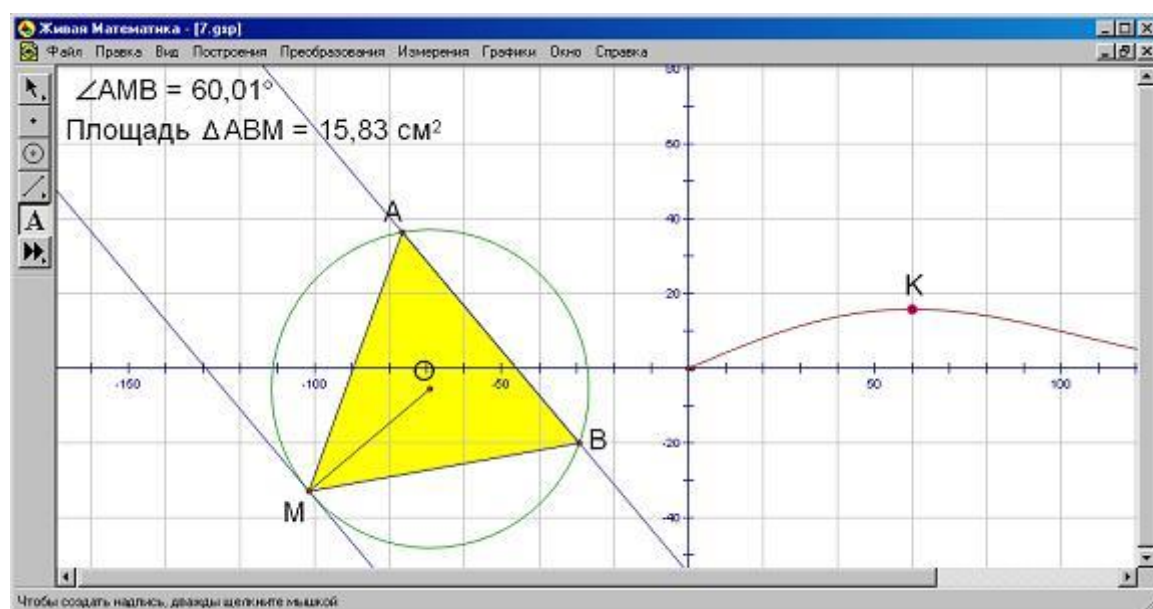


Рисунок 13.

Проведенный нами анализ многочисленных публикаций, посвященных использованию возможностей DGS, показывает, что компьютерные эксперименты с динамическими моделями применяются в обучении на самых разных этапах работы с теоремой и задачей на доказательство с самыми разными целями.

1. *Конструктивные компьютерные эксперименты* применяются с целью создания учащимися образа геометрической конфигурации, которая является объектом исследования, а также с целью установления условия существования такой конфигурации (А.В. Анциферова, В.Р. Майер и др.) (см. пример 7).

2. *Разведочные (предварительные) компьютерные эксперименты* применяются с целью подведения учащихся или к открытию факта, сформулированного в теореме, или к постановке задачи на доказательство (А.В. Анциферова, Де Вилье, В.А. Далингер, В.Р. Майер, Дж. Ханна и др.); эти эксперименты ставятся в условиях ограниченности знаний об объекте или предмете исследования:

1) неизвестен вид метрического соотношения, имеется лишь подозрение о зависимости одной геометрической величины от другой или других (см. пример 2) или подозрение о связи геометрических величин соответственных элементов фигур, связанных каким-либо отношением или преобразованием (см. пример 4);

2) неизвестен вид геометрического объекта, имеются лишь сведения о его желаемых свойствах (см. пример 8);

3) неизвестен характер позиционных свойств элементов геометрической конфигурации, имеется лишь интерес узнать о сохранении или условиях изменения взаимного расположения одних элементов относительно других (см. примеры 6, 4).

3. *Контрольные компьютерные эксперименты* («компьютерные доказательства») применяются с целью

- проверки гипотезы (см. пример 11).
- выбора рабочей гипотезы из нескольких альтернатив (см. пример 12),
- уточнения гипотезы (см. пример 7);
- опровержения высказанного утверждения или убеждения в его истинности (см. пример 6).

При обсуждении проблемы соотношения экспериментальных и дедуктивных методов в обосновании математических утверждений, компьютерный эксперимент, проводимый с целью верификации утверждений, математики часто называют «компьютерным доказательством» (Н.А. Вавилов, Ю.В. Матиясевич, В.А. Успенский и др. [8, 58, 102, 55, 49, 45, 59]). Тем самым они подчеркивают «конкурентноспособность» метода компьютерного эксперимента в части реализации функций убедительности (в сравнении с дедуктивным методом). Приведем в подтверждение сказанному слова из

выступления Н.А. Вавилова, д.ф.-м.н., профессора кафедры алгебры и теории чисел математико-механического факультета СПбГУ на совместном заседании Санкт-Петербургского математического общества и секции математики Дома учёных, 23.03.2010: « ...В последнее время все чаще обсуждается вопрос об изменении статуса доказательства и уменьшении нашей уверенности в справедливости результатов. Критика и скептицизм подобного рода наиболее энергично, часто и агрессивно озвучиваются в двух следующих направлениях: сомнения в надежности доказательств, выполненных с помощью компьютера; сомнения в надежности исключительно длинных и сложных доказательств.... что касается компьютерных вычислений, то лично я склонен доверять им больше, чем любым математическим доказательствам, кроме самых простых...» [8].

Контрольный компьютерный эксперимент ставится лишь при наличии альтернатив, фиксирующих причины сомнений в истинности утверждения. Ими определяется способ построения динамической модели, характер вводимых параметров, область задания их изменения, выбор средств контроля устойчивости или изменчивости исследуемых свойств [139].

4. *Компьютерные визуализации доказательств дедуктивным методом* применяются с целью облегчения учащимся понимания сущности доказательства, а также подведения их к обнаружению идеи доказательства (Де Вилье, В.А. Далингер, Джонс, В.Н. Дубровский, Т.Ф. Сергеева, Дж. Ханна и др.) (см. примеры 3, 5).

Привлечение таких экспериментов к проведению или восприятию доказательств позволяет отслеживать преобразования образа объекта исследования в ходе рассуждений: выделение значимой части, перегруппировку элементов, введение дополнительных элементов, изменение взаимного расположения элементов конфигурации и т.п.

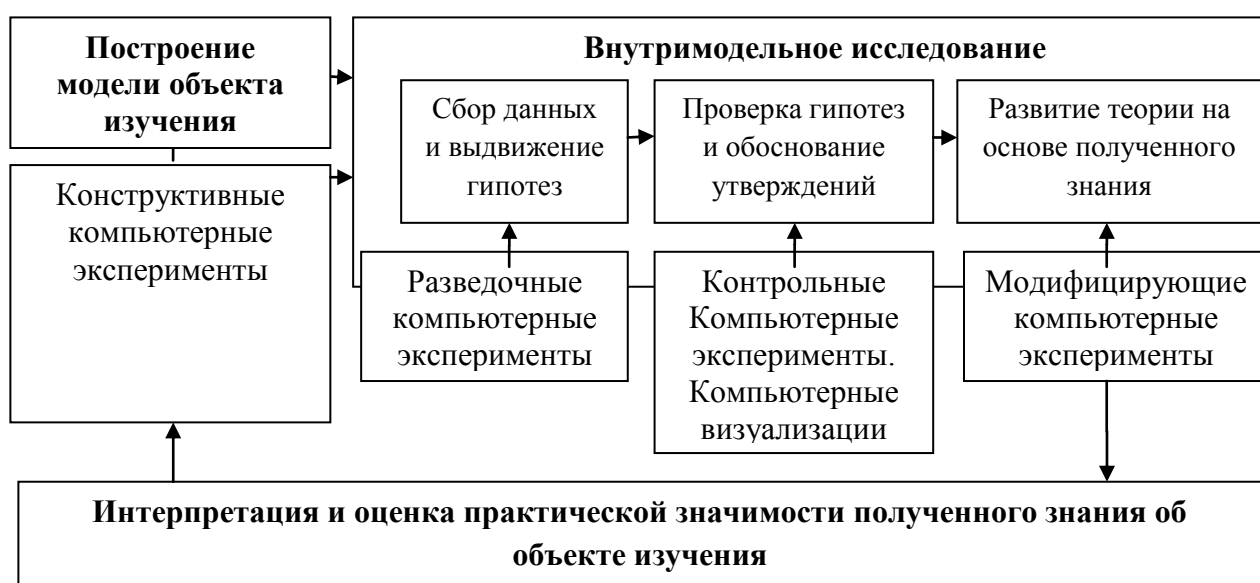
5. *Модифицирующие компьютерные эксперименты* применяются с целью развития идеи теоремы или установления ее содержательной связи с ранее доказанными утверждениями (см. примеры 9, 10).

Экспериментирование с динамической моделью направлено на исследование границ справедливости утверждения, оценки значимости тех или

иных ограничений, наложенных на изменчивость объекта исследования, выявления скрытых факторов путем варьирования числа отображаемых и не отображаемых элементов построения, использования возможности оставлять «след» объектами в процессе изменения [140].

Представленная классификация показывает, что компьютерные эксперименты могут быть использованы на всех этапах цикла учебного математического познания, имитирующего схему модельного исследования (схема 2).

Схема 2.



Представленная схема показывает, что компьютерные эксперименты могут быть использованы практически на всех этапах работы с теоремой.

Рассмотрим в целостном виде методику работы с теоремой, в которой максимально реализуются возможности, предоставляемые компьютерным экспериментом с динамической виртуальной моделью.

Пример 13: Методика работы с теоремой «Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника».

1 этап: Постановка проблемы (мотивация изучения теоремы).

В качестве мотивации открытия факта теоремы перед учащимися может быть поставлен проблемный вопрос: «Известно, что биссектриса угла треугольника делит его пополам. Правильно ли будет утверждать, что

биссектриса делит пополам и сторону, которую она пересекает?». В ходе обсуждения вопрос может быть конкретизирован: «Продемонстрируйте средствами GeoGebra случаи, для которых это утверждение верно. Используйте GeoGebra, чтобы ответить на вопрос, почему это утверждение неверно для остальных случаев?»

Решение данной задачи требует проведение конструктивного КЭ, направленного на создание виртуальной модели обсуждаемой ситуации (рис.14).

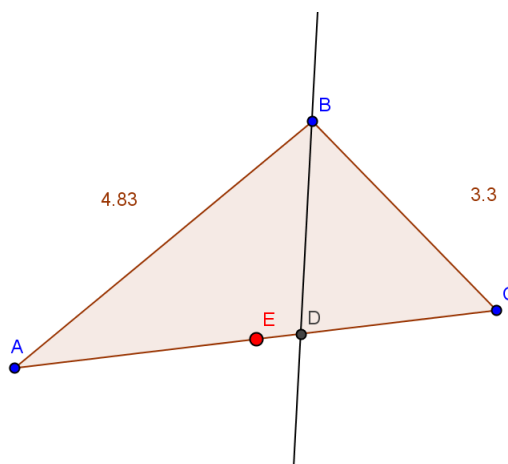


Рисунок 14.

Средством проверки справедливости утверждения на представленной динамической модели являются: точка E – середина отрезка AC , а также выведенные на экран текущие значения длин сторон AB и BC . Перемещая вершину B учащиеся добиваются совмещения точек E и D . Это позволяет им сделать вывод о том, что утверждение справедливо лишь для равнобедренных треугольников, в которых AC является основанием.

В ходе экспериментов с динамической моделью учащиеся также могут установить, что отношение отрезков AD и DC как-то зависит от соотношения длин сторон AB и BC , в частности, они могут высказать эту гипотезу в терминах «больше/ меньше», что побуждает их к дальнейшему исследованию закономерности.

Этап 2. Выдвижение гипотезы (ознакомление с фактом теоремы или подведение к открытию).

В качестве метода для уточнения исходной гипотезы перед учащимися может выступать разведочный (численный) эксперимент (рис.15).

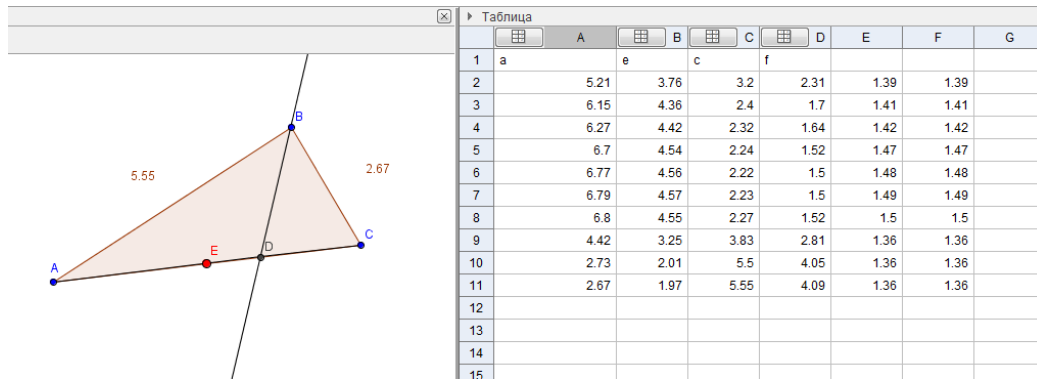


Рисунок 15.

Собранные в электронную таблицу данные о соответственных текущих значениях отрезков $AB=c$, $BC=a$, $CD=e$, $AD=f$ позволяют исследовать отношения длин отрезков, результатом чего является выдвижение гипотезы справедливости равенства: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$.

Этап 3. Проверка, доказательство, опровержение гипотез (выделение условия и заключения теоремы, иначе усвоение содержания теоремы; построение аналитического рассуждения; проведение доказательства).

В качестве метода для проверки гипотезы выступает контрольный эксперимент, для проведения которого требуется параметрическое задание треугольника (например, по двум сторонам и углу между ними), а также создание динамической надписи, фиксирующей проверяемое соотношение (рис. 16).

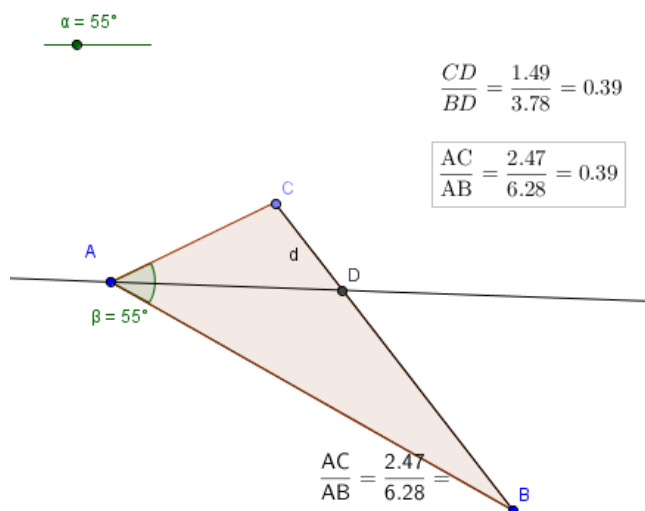


Рисунок 16.

Представленный на рисунке динамический чертеж позволяет проверить устойчивость пропорции относительно изменений каждого из параметров, задающих треугольник, или относительно их случайных сочетаний.

Этап 4. Развитие теории и практики на основе полученного знания (применение теоремы; установление связей изучаемой теоремы с другими теоремами; составление новых задач, вытекающих из доказанного утверждения).

В качестве метода для проверки гипотезы выступает модифицирующий эксперимент. Например, учащимся можно предложить задание: «Проверьте, выполняется ли утверждение, если биссектриса внешнего угла треугольника или ее продолжение пересекает продолжение противоположной стороны, то точка пересечения отстоит от концов этой стороны на расстояния, пропорциональные длинам двух других сторон».

Выводы из параграфа:

1) Под компьютерным экспериментом, проводимым средствами DGS, мы будем понимать разновидность модельного эксперимента, в котором в качестве объекта изучения выступает динамический чертеж (модель) геометрической конфигурации.

2) DGS предоставляет возможность проводить компьютерный эксперимент практически на всех ступенях гносеологического цикла учебного математического познания, отнесенного к этапам работы с теоремой: конструктивный, разведочный, контрольный и модифицирующий. Наиболее спорным является его применение на этапе проверки и обоснования гипотезы.

3) В теории и методике обучения математике наметились три основных подхода в решении данной проблемы:

- запретить использовать компьютерные эксперименты для верификации утверждений;
- ограничить использование контрольных компьютерных экспериментов случаями, когда доказательство дедуктивным методом недоступно пониманию учащихся;
- компьютерные эксперименты необходимо использовать для обучения доказательству утверждений на «светском» и «пользовательском» уровнях.

1.3. Возможности различных систем динамической геометрии в реализации этапов изучения геометрических утверждений

Представленный нами в параграфе 1.2 анализ публикаций, связанных с постановкой и проведением компьютерного эксперимента при обучении геометрии в школе, показывает, что технической основой всех этих компьютерных экспериментов выступают *системы динамической геометрии* (называемыми также интерактивными геометрическими средами, интерактивными геометрическими системами, программами динамической геометрии).

Система динамической геометрии (DGS) - это «программное обеспечение, позволяющее выполнять геометрические построения на компьютере таким образом, что при изменении одного из геометрических объектов чертежа остальные также изменяются, сохраняя заданные между собой соотношения неизменными» [106]. Аналогичное описание программных продуктов этого типа дают и другие авторы. Так, например, В.Н. Дубровский [26], используя другой термин для их обозначения, дает следующее определение: «Программа динамической геометрии - это среда, позволяющая создавать динамические чертежи, т.е. компьютерные геометрические чертежи-модели, исходные данные которых можно варьировать с сохранением всего алгоритма построения, просматривать их и работать с ними».

Математическую основу динамической геометрии составляют результаты реализации «Эрлангенской программы» немецкого математика и педагога Феликса Клейна (1872 год) [41]. Именно под таким именем известен широкой общественности его доклад на тему «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», сделанный в Эрлангенском университете (г. Нюрнберг, Германия) в октябре 1872 года как доклад вступающего в должность профессора о программе своей научной деятельности. В этом докладе Феликсом Клейном были высказаны идеи, которые не только позволили в дальнейшем связать единой концепцией разнообразные геометрические теории, но и выработать достаточно универсальные геометрические методы исследования многообразий любого числа измерений в любой геометрической теории. Эти

методы основаны на идее постановки задачи изучения свойств многообразий, как задачи выявления инвариантов относительно главной группы преобразований. В подтверждение сказанному приведем цитату из русского перевода его доклада: «Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразований группы» [41, с.405].

Уже через два года после знаменитого доклада Ф. Клейна (в 1874 году) французский математик Хуге Чарльз Роберт Мерэй [165], вдохновленный идеями Клейна, высказал смелое предложение *о целесообразности обучения геометрии посредством движения* (при этом имелась в виду перестройка содержания курса геометрии в соответствии с идеями Ф. Клейна [39, 40]). Такая перестройка предполагала отказ от преподавания евклидовой геометрии в пользу геометрии преобразований. Сведений о том, удалось ли Мерэю осуществить высказанную идею, мы не нашли. Однако хорошо знаем те последствия, к которым привела ее реализация в системе российского геометрического образования в период колмогоровской реформы.

Идея использования геометрических преобразований в качестве математической основы *создания и использования динамических образов геометрических объектов* как вспомогательного средства изучения евклидовой геометрии, по-видимому, зародилась под влиянием идей Ф. Клейна у другого французского математика Анри Пуанкаре, который обладал в силу обширности своих научных интересов (философия, физика, астрономия) стилем научного мышления не только математика, но и физика-философа. В его книге, впервые изданной в том же 1874 году, раскрывается суть данной идеи через описание методических приемов использования *«подвижных инструментов»* для ознакомления учащихся с аксиомами и постулатами геометрии. К ним относятся: подведение учащихся к пониманию прямой линии как оси вращения посредством вращения линейки, подведение учащихся к открытию бесконечности прямой линии посредством скольжения линейки, подведение учащихся к определению окружности через демонстрацию её построения циркулем, демонстрация свойства о наличии в плоскости прямых и точек посредством исследования количества

степеней свободы движущейся линейки по рисовальной доске, выявление особых свойств плоскости по сравнению с цилиндрической, конической и сферической поверхностями путем аналогичного экспериментирования с линейкой и др.

Правомерность использования этих приемов при обучении геометрии А. Пуанкаре обосновывает следующим образом: «Быть может, вас удивит это постоянное применение подвижных инструментов. Это не грубый прием, он более философский, чем это кажется с первого взгляда. Что такое геометрия для философа? Это изучение некоторой группы. Какой именно? Группы движений твердых тел. Каким же образом определить эту группу, не заставляя двигаться некоторые твердые тела?» [92, с.364].

Следующим этапом в развитии идеи можно считать применение к получению движущихся изображений геометрических объектов средств кинематографии (в 40-50-е годы XX века). Способ их создания и использования в процессе обучения геометрии детально изложен, например, в публикации Генри Шера 1945 года [169]. С помощью таких изображений можно было демонстрировать процесс преобразования геометрических образов, сделать видимой устойчивость и изменчивость свойств относительно преобразований. Однако процесс создания таких диафильмов был довольно трудоемким, поэтому они не могли рассматриваться в качестве инструмента учебной деятельности учащихся.

Такая возможность «забрехала» лишь в период появления компьютерной техники. Прототипом современных DGS следует считать первую графическую станцию Sketchpad, созданную в 1963 году американским ученым в области информатики Иваном Сазерлендом. Sketchpad позволяла вводить ограничения и задавать взаимосвязи между сегментами и дугами. С ее помощью можно было рисовать горизонтальные и вертикальные линии и комбинировать их в различные фигуры. Их можно было копировать, перемещать, поворачивать или масштабировать, сохраняя их основные свойства.

Тому факту, что применение возможностей Sketchpad к решению образовательных задач было впервые найдено во Франции, мы обязаны радикальной реформе математического образования 60-х – 70-х годов, которая

наиболее бурно проходила именно в этой стране, под влиянием интереса к деятельности и научным результатам группы математиков, работавших под псевдонимом Никола Бурбаки. Задача реформы состояла в том, чтобы положить в основу школьной математики понятия множества, преобразования и структуры; модернизировать математическую терминологию и символику, существенно сократить многие традиционные разделы элементарной математики. О необходимости переноса последних достижений математической науки в систему школьного математического образования впервые заговорили на математическом конгрессе в Амстердаме в 1954 году. В 1962 г. на международном математическом конгрессе в Стокгольме обсуждались уже первые планы реализации этой идеи. В частности, отмечалось, что в большом числе западных стран предполагается изучать в школьном курсе математики элементы теории множеств и математической логики, понятия современной алгебры (группы, кольца, поля, векторы), начала теории вероятности и математической статистики. Предлагалось также сократить или даже исключить из школьного курса математики ряд традиционных разделов. В частности, существенному сокращению и «осовремениванию» предлагалось подвергнуть курс элементарной геометрии [28].

В 1980 году была образована исследовательская группа, включавшая ученых нескольких городов Франции (Гренобль, Сент-Этьен, Париж-Орсе, ле-Ман, Монпелье). Координатором работы группы выступал Жан-Мари Лаборде, с целью создания среды поддержки научной работы и образовательной деятельности с объектами дискретной математики (графами, булевыми функциями и др.) - Cabri (Cahier de B Rouillon Informatique, по-русски, «Черновик для информатики»). Однако в процессе реализации этого проекта возникла идея обобщения возможностей Cabri. Она должна была обеспечить возможность замены доски и мела, бумаги и ручки компьютером. На этой основе было решено создать версию программы, позволяющей получать динамические образы геометрических объектов и использовать их для экспериментального обучения – Cabri Géomètre.

Идея создания программы Cabri Géomètre явилась своего рода реакцией на распространившийся в стране формализм в преподавании геометрии. Описание образовательных возможностей этой программы было изложено Жан-Мари Лаборд (Jean-Marie Laborde) в книге "Cabri-géomètre", изданной в 1985 году. А уже через год, в 1986 году, его студенты Филипп Кейт (Philippe Cayet), Ив Булак (Yves Baulac) и Франк Билимен (Franck Bellemain) подготовили программное обеспечение для поддержки курса динамической геометрии.

Несмотря на то, что в тот период компьютерная графика уже добилась значительных результатов, использование программы в образовательных целях было весьма ограниченным, так как учебные заведения были, в основном, оснащены терминалами, связанными с Центральной ЭВМ.

По-настоящему возможности программы открылись с появлением персональных компьютеров и операционных систем с графическим интерфейсом. В 1988 году первая версия Cabri - geometre была замечена компанией Apple. Следствием этого стало массовое использование данного программного продукта при обучении геометрии. Несмотря на то, что данный программный продукт не русифицирован, возможности Cabri были по достоинству оценены и в России, о чем свидетельствует ряд статей, опубликованных в журнале «Компьютерные инструменты в образовании» преподавателем кафедры математики и информатики педагогического университета Вейнгартен (Германия) Хайнцем Шуманом [145, 146, 147, 148]. Одним из недостатков Cabri – geometre является невозможность аналитического задания геометрических объектов, а также сбора и обработки статистических данных, что значительно ограничивает возможности проведения конструктивных и численных разведочных экспериментов. Доказательством представленных выше недостатков является перечень инструментов среды, приведенный на рисунке 17:

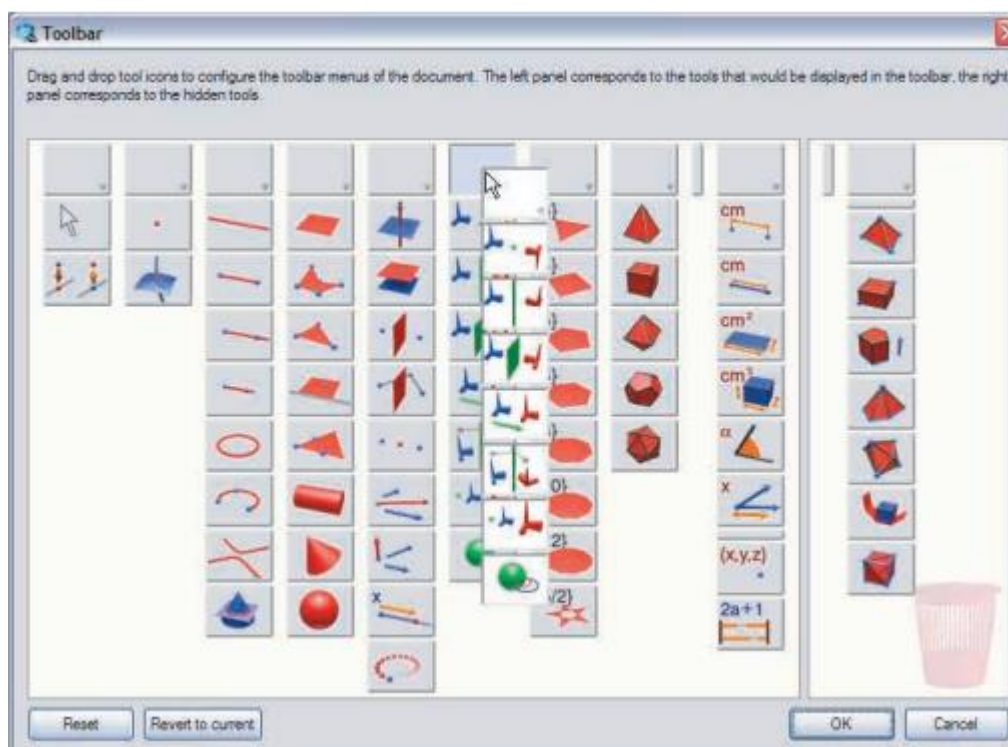


Рисунок 17.

Параллельно с развитием Cabri разрабатывалась и аналогичная программа The Geometr's Sketchpad («Блокнот геометра»). Ее первая версия появилась в 1989 году. Автором данного программного продукта стал Николас Джакив (Nicholas Jackiw). В 2005 году программа The Geometer's Sketchpad русифицирована Институтом новых технологий (г. Москва). В России она распространялась сначала под названием «Живая геометрия», что подчеркивало возможность создания в данной среде динамических моделей геометрических объектов, затем название программы было изменено. Сейчас она называется «Живая математика», что говорит о расширении области ее использования, о усилении возможностей аналитического задания геометрических объектов и построении геометрических интерпретаций объектов иной природы. Данная DGS позволяет осуществлять построение геометрических мест точек по их уравнениям, однако четко разделяет алгебраически и геометрически заданные объекты, не позволяя создавать из них общую геометрическую конфигурацию, варьировать способ задания и описания построенного объекта.

Данная программа позволяет заносить данные компьютерного эксперимента в электронную таблицу, но не снабжена средствами статистического анализа этих данных. Программа снабжена простым и удобным в использовании инструментом

для ведения записей в графическом окне, однако в нем не предусмотрены средства для создания динамических текстов. Эта особенность программы значительно сужает спектр контрольных экспериментов на проверку справедливости метрических соотношений [32].

Наиболее известными сподвижниками в распространении данной DGS являются Рыжик В.И., учитель математики физико-технической школы г.Санкт-Петербурга, и Храповицкий И.С., учитель математики на углубленном уровне средней школы №3 г.Глубокое, Беларусь.

Русифицированными являются также DGS GeoNext, разрабатываемая с 1999 года на кафедре математики и дидактики в Университете Байройта (Германия), и GeoGebra, первая версия которой появилась в 2002 году благодаря усилиям австрийского математика Маркуса Хохенвартера (Markus Hohenwarter). Ограничения программы GeoNext связаны с тем, что в ней количество измерительных инструментов весьма ограничено. Они представлены лишь следующими инструментами (рисунок 18).

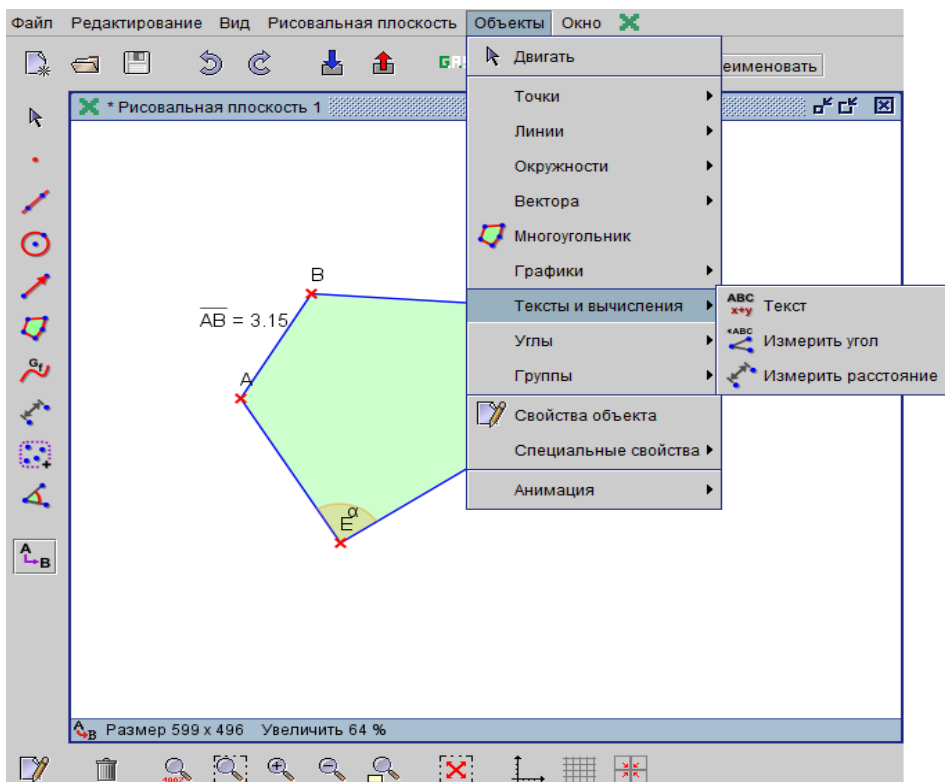


Рисунок 18.

Программа GeoGebra обладает всеми достоинствами «Живой математики» за исключением простоты работы инструментов по созданию текстов. Однако

этот недостаток компенсируется возможностями получения динамических записей, сочетанием и варьированием разных способов задания геометрических объектов и наличием встроенных инструментов статистического анализа данных, занесенных в электронную таблицу (см. рисунок 19).

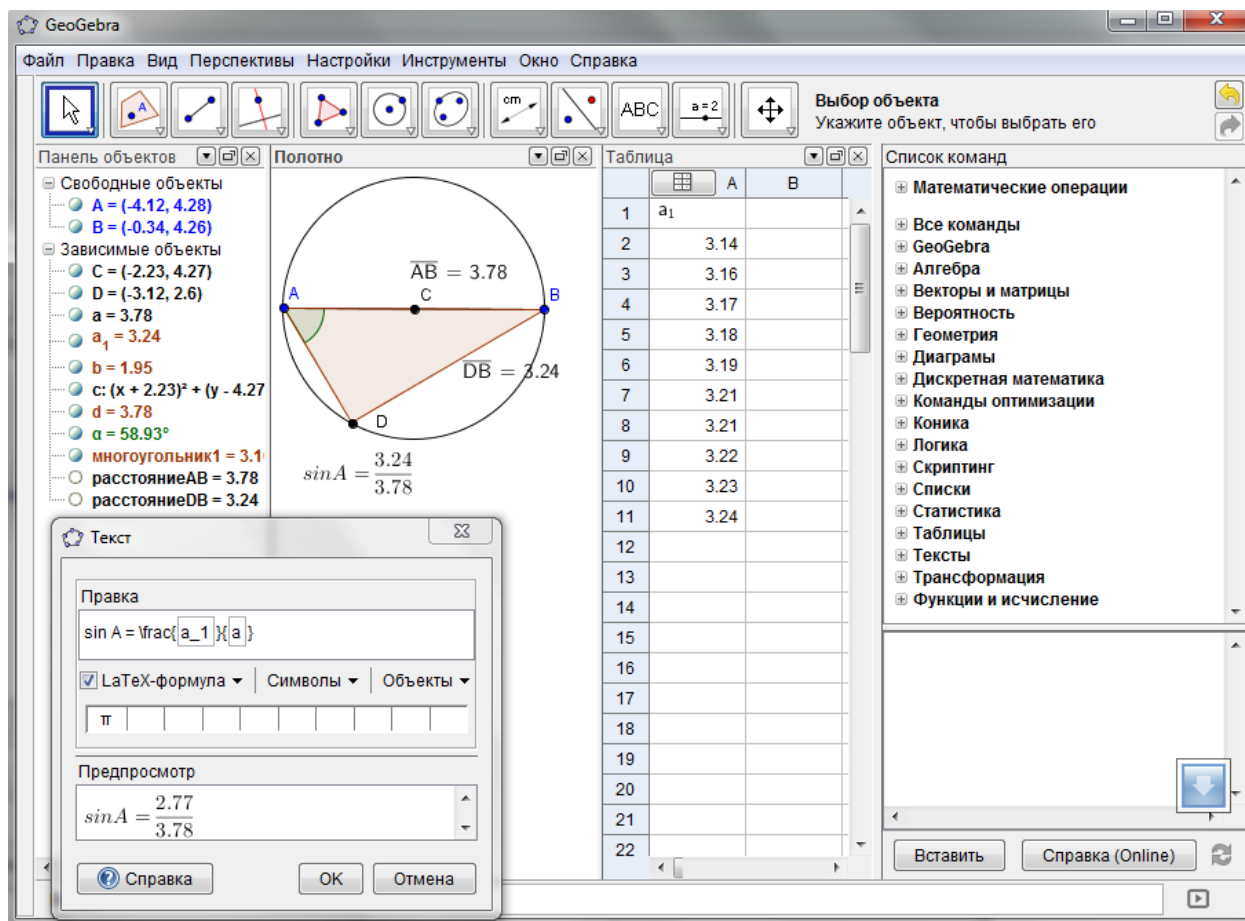


Рисунок 19.

Кроме того, в GeoGebra предусмотрены возможности вывода протокола построения динамической модели и отслеживания конструктивных связей элементов динамического чертежа, что является очень важным условием для обоснования корректности динамической модели (см. рисунок 20-20').

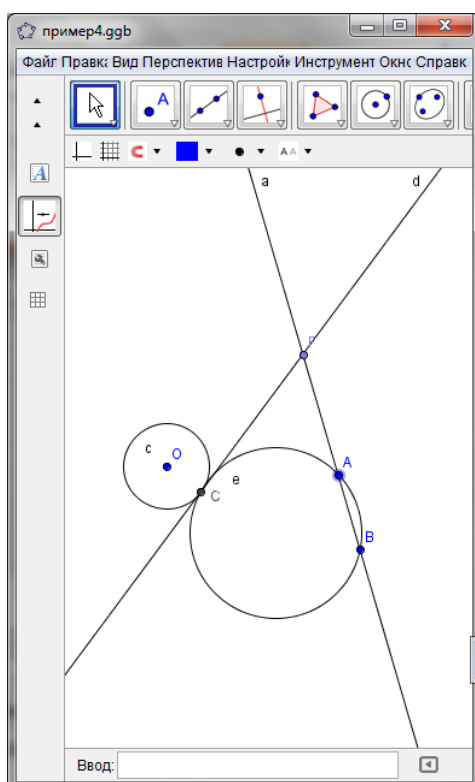


Рисунок 20.

№	Имя	Определение	Значение	Заголовков
1	Точка O		$O = (-2.62, 1.34)$	
2	Точка B		$B = (-2.12, 0.84)$	
3	Окружность c	Окружность, проходящая через B и с центром в O	$c: (x + 2.62)^2 + (y - 1.34)^2 = \dots$	
4	Точка A		$A = (0.22, 1.2)$	
5	Точка B		$B = (0.58, -0.04)$	
6	Прямая a	Прямая через A и B	$a: 1.24x + 0.36y = 0.7$	
7	Точка F	Точка на a	$F = (-0.36, 3.21)$	
8	Прямая b	Касательная к c через F	$b: 1.23x - 2.56y = -8.66$	
8	Прямая d	Касательная к c через F	$d: 2.29x - 1.69y = -6.24$	
9	Точка C	Точка пересечения c и d	$C = (-2.05, 0.92)$	
10	Окружность e	Окружность по точкам C, A, B	$e: (x + 0.81)^2 + (y - 0.23)^2 = \dots$	

Рисунок 20'.

Собственной разработкой российских программистов является «Математический конструктор». Создатель этой программы - фирма 1С. Первая версия её была выпущена в 2006 г. Главным отличием от остальных DGS является ориентация программы не на учащихся, а на учителей, а также подготовленных специалистов, которые занимаются созданием электронных образовательных ресурсов (ЭОР), часто называемых манипуляторами [26]. Программа обладает большим спектром инструментов для построения виртуальных динамических моделей геометрических фигур, графиков функций и проведения компьютерных экспериментов (см. рисунок 21-22).

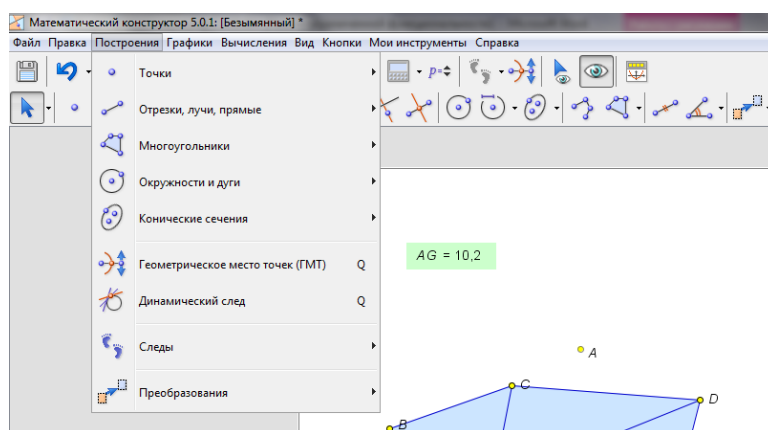


Рисунок 21.

Единственным ограничением является невозможность записи экспериментальных данных в электронную таблицу и проведения их статистического анализа.

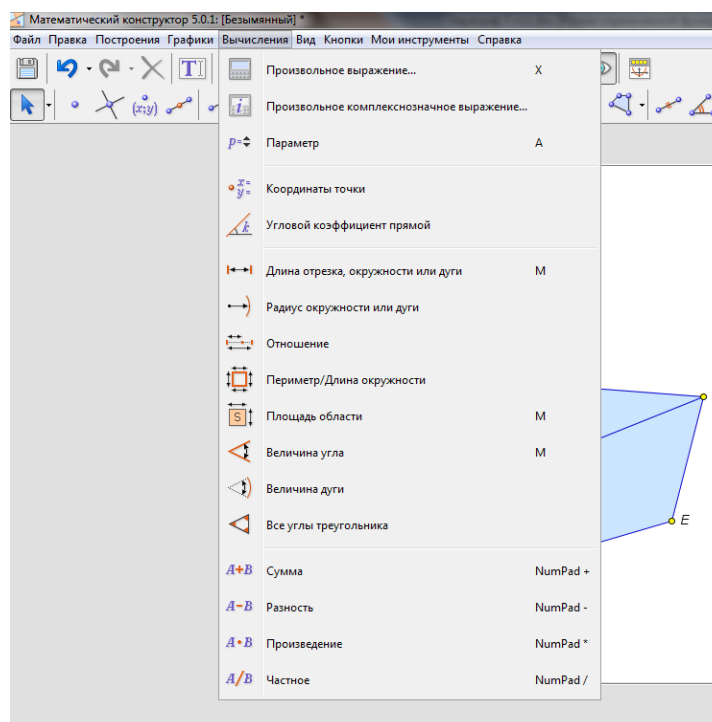


Рисунок 22.

Апробацию этой программы осуществляет группа математиков во главе с Дубровским В.Н., доцентом кафедры математики СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова. Опубликована серия статей, посвященных использованию этой ИГС для обучения геометрии. В.Н. Дубровский [27] описывает различные виды экспериментов, для проведения которых средствами Математического конструктора могут быть созданы *манипуляторы* (см. рис. 23, 24, 25, 26).

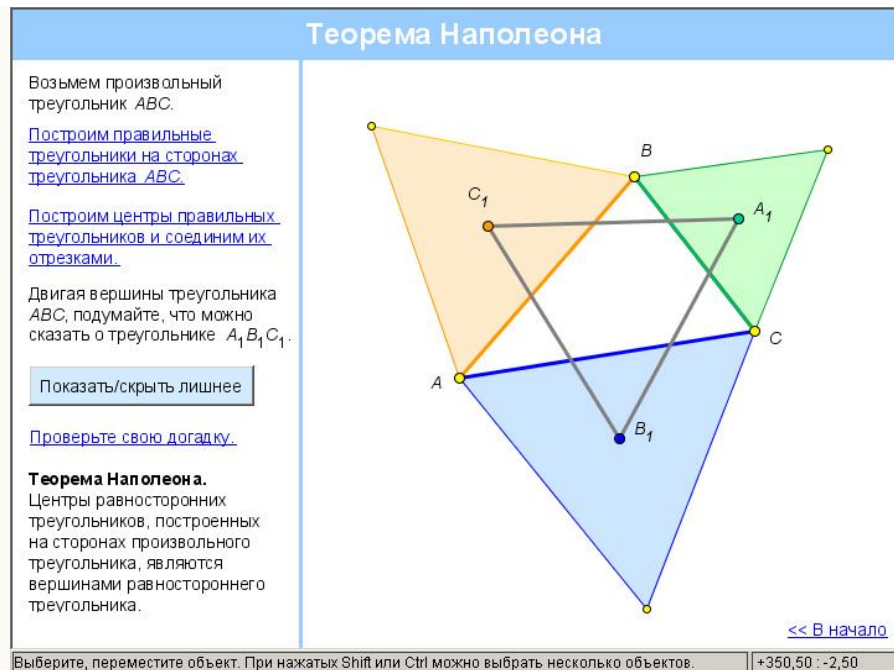


Рисунок 23. Манипулятор для проверки Теоремы Наполеона.



Рисунок 24. Манипулятор для выдвижения гипотезы о постоянстве суммы расстояний от внутренней точки треугольника до его сторон.

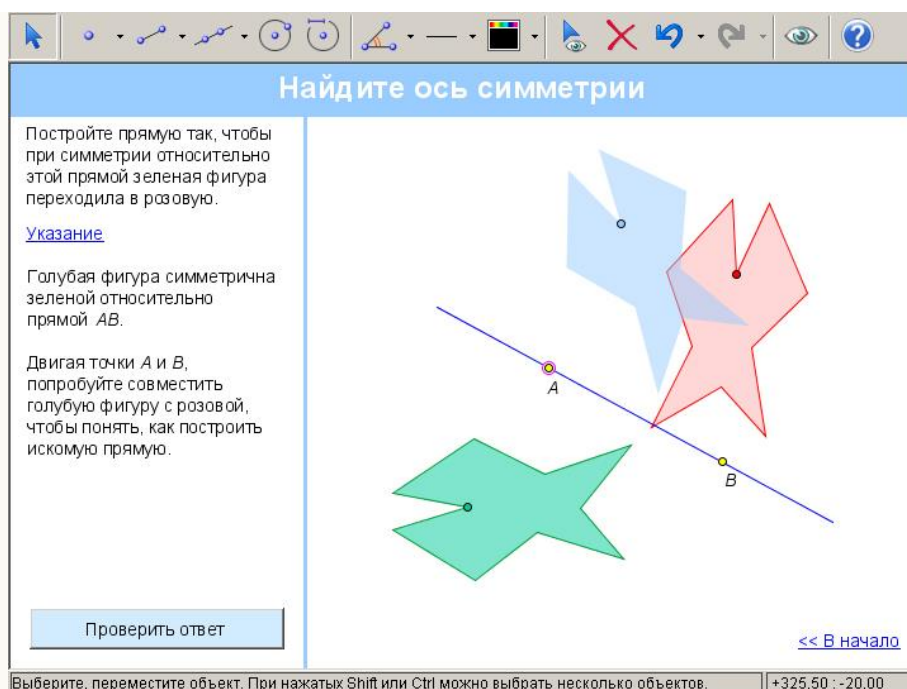


Рисунок 25. Манипулятор для решения задачи на определение вида движения.

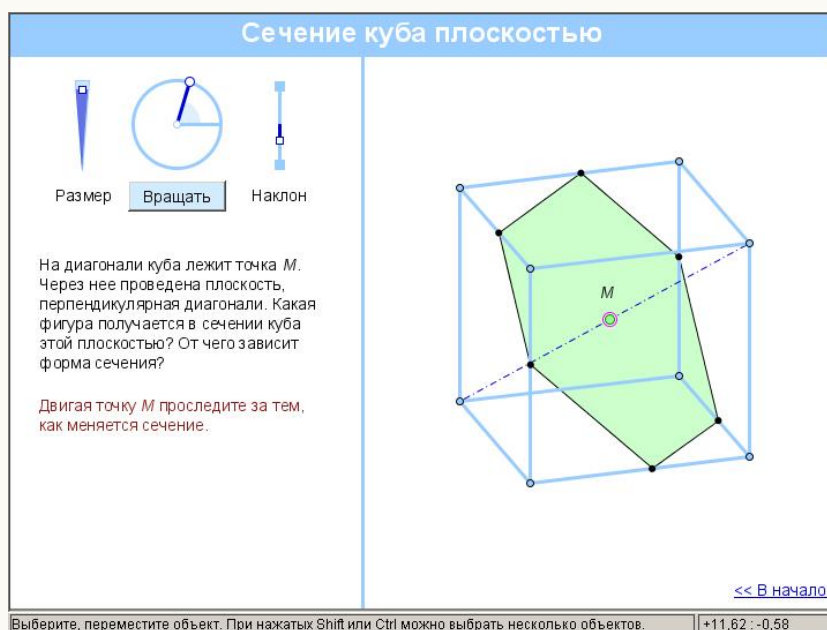


Рисунок 26. Манипулятор по определению вида сечения куба.

Проведенный нами анализ показывает, что наибольшими возможностями для проведения компьютерных экспериментов при изучении теорем и решения задач на доказательство обладает DGS GeoGebra (см.табл.4), т.к. поддерживает все необходимые их виды. Данный программный продукт пользуется наибольшей популярностью, т.к. переведен более чем на 50 языков и является свободно распространяемым. Также данная DGS - кроссплатформенная (Windows, Linux, Mac OS, и др.) и подходит для всех уровней образования: от начальной школы до высшей. Сегодня в её совершенствовании может принимать участие любой

желающий, т.к. она обладает открытым программным кодом. GeoGebra написана на языке Java, поддерживает 2D и 3D версии, имеется портативная версия. Программа получила несколько наград в области образовательного программного обеспечения в Европе и США [103].

Таблица 4.

Виды экспериментов	Cabri	«Живая математика»	Математический конструктор.	GeoGebra
1. Конструктивный эксперимент.	Выполнение построений геометрических фигур, но не аналитически заданных	Выполнение построений геометрических фигур при любом способе задания с невозможностью комбинации различно заданных фигур.	Выполнение любых построений.	
2. Разведочные (предварительные) компьютерные эксперименты	Нет возможности записи данных в таблицу.	Имеется возможность записи в таблицу		
	Нет средств анализа статистических данных	Нет средств статистического анализа данных	Есть средства статистического анализа.	
3. Контрольные компьютерные эксперименты	Нет средств создания динамических текстов. Имеется возможность параметрического задания объектов	Есть средства создания динамических текстов. Имеется возможность параметрического задания объектов.		
		Параметр не может принимать случайные значения.		Параметр может принимать случайные значения.
4. Компьютерные визуализации доказательств	Имеется возможность анимировать динамическую модель, выделять объекты цветом, изменять шрифт, последовательно отображать надписи и элементы чертежа с помощью активных кнопок.			
	-	-	-	Предусмотрены возможности вывода протокола построения. Возможность условного задания цветовых изменений.

				отображения объектов и записей
5. Модифицирующие компьютерные эксперименты	Можно расширять и сужать область допустимых значений параметров. Варьировать позиционные свойства свободных элементов чертежа. Отображать и скрывать элементы чертежа. Строить образы фигур при геометрическом преобразовании			
	-	Можно исследовать «след» перемещаемого объекта.		
	Нельзя варьировать способ задания объекта			Можно варьировать способ задания объекта

Выводы из параграфа. Проведенный нами сравнительный анализ возможностей различных DGS позволил сделать обоснованный выбор GeoGebra как программы поддержки учебной деятельности, обладающей наибольшими возможностями для обучения доказательству геометрических утверждений.

Выводы по главе 1.

Проведенный нами анализ истории информатизации геометрического образования в России позволил показать, что современный период характеризуется подготовкой к переходу на массовое использование в системе общего геометрического образования систем динамической геометрии (DGS). Перед российскими учеными стоит не только задача разработки электронных приложений к учебникам геометрии, но и разработка методик использования этих приложений для достижения образовательных результатов в соответствии с требованиями ФГОС. При этом должны быть учтены не только положительные эффекты от внедрения новых средств обучения в массовую практику, но и возможные риски, с которыми столкнулись ученые и учителя-практики за рубежом. Наиболее значимой является разработка методики, позволяющей преодолеть «экспериментально-теоретический разрыв» - возможную тенденцию к отказу большинства учителей и учащихся от использования дедуктивных рассуждений в методике работы с теоремой. Проведенный нами анализ передового педагогического опыта использования возможностей DGS в России и за рубежом показал, что данное средство может быть использовано для организации проведения компьютерных экспериментов практически на всех этапах методики работы с

теоремой при реализации исследовательского подхода к обучению геометрии. В зависимости от места компьютерного эксперимента в структуре гносеологического цикла учебного математического познания нами выделены следующие виды компьютерных экспериментов:

1. Конструктивный компьютерный эксперимент применяется с целью проверки существования объекта, описанного в условии теоремы, а также с целью создания учащимися образа геометрической конфигурации, которая является объектом исследования. (А.В. Анциферова, В.Р. Майер и др.)

2. Разведочный (предварительный) компьютерный эксперимент применяется с целью подведения учащихся к открытию факта теоремы или к постановке задачи на доказательство. (А.В. Анциферова, В.Р. Майер, В.А. Далингер, Де Вилье, Дж.Ханна, и др.). Данный эксперимент ставится в условиях ограниченности следующих видов знаний об объекте или предмете исследования:

1) неизвестен вид метрического соотношения, имеется лишь подозрение о зависимости одной геометрической величины от другой или других;

2) неизвестен вид геометрического объекта, имеются лишь сведения о его желаемых свойствах;

3) неизвестен характер позиционных свойств элементов геометрической конфигурации, имеется лишь интерес узнать о сохранении или условиях изменения взаимного расположения одних элементов относительно других.

3. Контрольный компьютерный эксперимент применяется с целью выбора рабочей гипотезы из нескольких альтернатив, уточнения гипотезы, опровержения высказанного утверждения или убеждения в его истинности (В.Н. Дубровский, В.И. Рыжик, А.В. Середина, О.А. Боровкова, Джонс, Дж. Ханна и др.)

4. Компьютерная визуализация доказательств дедуктивным методом применяется с целью облегчения учащимся понимания сущности доказательства, а также подведения их к обнаружению идеи доказательства (В.Н. Дубровский, В.А. Далингер, Т.Ф. Сергеева, Дж. Ханна, Де Вилье, Джонс и др.)

5. Модифицирующий компьютерный эксперимент применяется с целью развития идеи теоремы или установления ее содержательной связи с ранее доказанными утверждениями (В.И. Рыжик, Р. Лейкин, Д. Гроссман и др.).

Сравнивая возможности различных DGS, мы пришли к выводу, что наибольшими возможностями в поддержке выделенных видов компьютерного эксперимента обладает DGS GeoGebra.

Проведенный нами анализ публикаций, посвященных методике работы с геометрическими утверждениями, показал, что наиболее проблемным является вопрос о целесообразности использования контрольного компьютерного эксперимента.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕМ И ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ DGS GEOGEBRA

2.1 Модель поэтапного формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием GeoGebra

Как показал проведенный нами анализ научной, учебной литературы и нормативной документации, традиционно в системе российского образования обучение доказательству сводится к обучению обоснования истинности утверждений дедуктивными методами.

Овладение дедуктивным методом является приоритетным и сегодня, о чем свидетельствуют требования к результатам обучения предметной области «Математика и информатика», предъявляемые ФГОС ООО: «В результате изучения предметной области «Математика и информатика» обучающиеся развивают логическое и математическое мышление, получают представление о математических моделях; овладевают математическими рассуждениями; учатся применять математические знания при решении различных задач и оценивать полученные результаты...» [121, с.13]. Этот факт также подтверждают и характеристики, даваемые термину «доказательство» авторами учебных пособий по геометрии для учащихся общеобразовательных учреждений. Так, в учебнике Л.С. Атанасяна введение термина «доказательство» предварено примером рассуждений, обосновывающих истинность рассуждения о равенстве вертикальных углов. С целью подготовки учащихся к использованию подобных рассуждений при обосновании истинности других положений геометрии он отмечает следующее: «В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений, называется теоремой. А сами рассуждения называются доказательством теоремы» [15, с.28]. Аналогичное пояснение термину «доказательство» дано и в учебнике А.В. Погорелова [84, 85]: «Правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры устанавливается путем рассуждения. Это рассуждение называется доказательством» [84, с.13]. Наглядный образ рассуждений, называемых

доказательством, а также их роль в геометрии, создает в своем учебном пособии И.Ф. Шарыгин [136, с.94].



Рисунок 27.

Представленные описания понятия «доказательство» нельзя рассматривать в качестве определения этого понятия. Оно не может быть введено на уровне общего образования в связи с недостаточностью логических и методологических знаний учащихся.

Следует отметить, что сложность раскрытия учащимся содержания понятия «доказательство» связано еще и с тем, что в самой математике оно имеет множество смысловых значений.

Проведем анализ описания данного термина в учебной литературе, адресованной студентам высших учебных заведений с целью построения действующей семантической модели данного понятия. Под семантической моделью В.В. Богун, В.Н. Осташков, Е.И. Смирнов понимают «...ориентированный граф, в котором вершины соответствуют определенным объектам или понятиям, а дуги отражают отношения между вершинами» [67, с.80].

Понятие «доказательство» раскрывается в учебной литературе по математике, логике, методологии математики с разных точек зрения: целей использования, мотивов обращения, методов и требований. Так, например, А.Д. Гетманова в своем учебнике по логике [50, с.198] раскрывает суть данного понятия следующим образом: «Доказательство – совокупность логических приемов обоснования истинности тезиса». Данное описание акцентирует внимание на цели проведения доказательства, а также на его логические основы. Подобно термин «доказательство» раскрывается в монографиях и справочной

литературе по математике. Так, например, в [67] дается следующее определение: «...доказательство - логическое действие, в процессе которого истинность какого-либо суждения обосновывается с помощью других суждений, признанных истинными. Многовековой опыт убедил людей в том, что обоснованность доказательства – это важное свойство правильного мышления, приводящего к истинному знанию. Логика выделяет во всяком доказательстве три основные части: тезис-суждение, истинность которого требуется доказать, довод-суждение, истинность которого доказана или проверена, демонстрацию – логическое рассуждение, в процессе которого из доводов выводится истинность тезисов» [67, с.289].

В учебнике [9] вводится следующее определение: «Доказательство – это процесс установления истинности одних утверждений на основании других, т.е. обоснование истинности высказываний вида: $P(x) \Rightarrow Q(x)$ » [9, с.55]. Оно раскрывает понятие «доказательство» с точки зрения метода, основу которого составляет умозаключение дедуктивного характера, т.к. «Дедуктивные умозаключения - те умозаключения, у которых между посылками и заключением имеется отношение логического следования» [50, с.114].

Более детально описывает дедуктивный метод доказательства А.А. Столяр, давая следующее определение: «Доказательством предложения (теоремы) T называется конечная последовательность предложений (данной теории) $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) каждое предложение φ_i последовательности или аксиома, или получается из предшествующих предложений по какому-либо из правил вывода (логики предикатов),

2) последнее предложение последовательности φ_n есть T » [115, с.185].

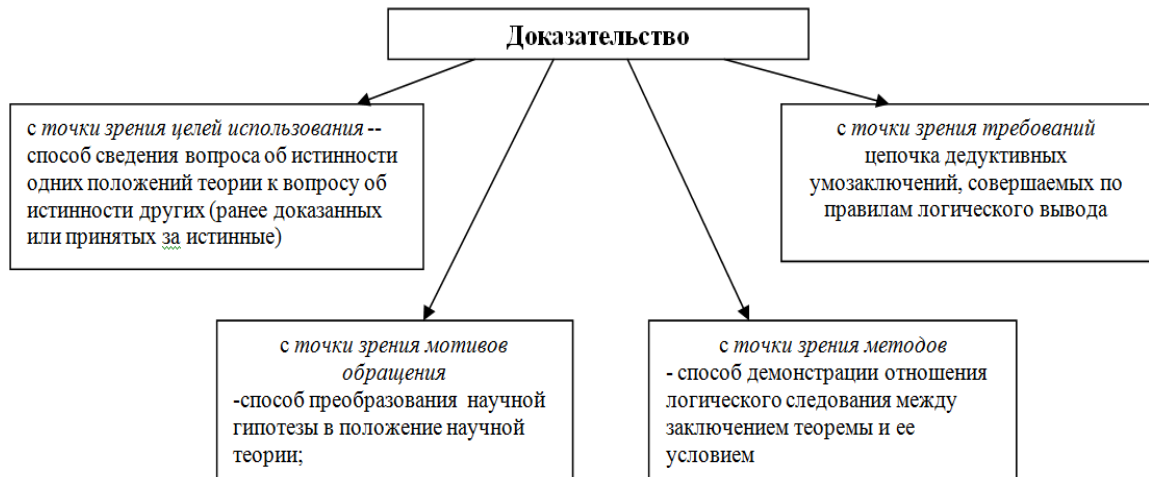
В методологии математики отмечается, что понятие «доказательство» следует рассматривать контекстуально: «Относительность понятия «доказательство» заключается в том, что оно не есть нечто абсолютное, раз и навсегда установленное. С течением времени меняются представления о ясности, убедительности, осмысленности, очевидности и достоверности рассуждений. Поэтому критерий приемлемости и «законности» доказательства меняется от

эпохи к эпохе и определяется только мнением математиков, живущих в это время» [52, с.239-240]. В.В. Мадер доказывает на конкретных примерах, что даже сами математики рассматривают доказательства, как нечто относящееся к области психологии. Доказательство, прежде всего, представляет собой интеллектуальную деятельность, целью которой является убеждение самого себя и других в истинности обсуждаемого предложения. Обсуждая принцип достаточного основания, В.В. Мадер показывает, что он не достижим даже в случае проведения формальных доказательств. «Они безупречны в логическом отношении, но совершенно непригодны для восприятия, т.к. из них выпадают и остаются без упоминания именно те идеи, которые служили путеводной нитью и являлись поэтому подлинным обоснованием полученного результата. Именно эти идеи и позволяют поверить в доказательство: без такой веры его нет» [52, с. 240].

С точки зрения мотивов деятельности понятие доказательства характеризует Г.А. Нуждин. Он пишет: «Любое доказательство - это «борьба» с какими-то альтернативами, возможностями, проблемами»[71, с.44].

Приведенные примеры показывают, что понятие «доказательство» имеет целый спектр несводимых друг к другу смысловых значений, каждое из которых должно быть так или иначе освоено учащимися. Проведенный нами анализ научных трудов, посвященных вопросам обучения доказательству в общеобразовательной школе (источники) позволяет представить спектр семантических значений, подлежащих освоению следующей семантической моделью (см. схему 3):

Схема 3.



Данная схема показывает, что в этих пособиях термин «доказательство» жестко связывается с дедуктивным методом его проведения. Суть дедуктивного метода раскрывается в большинстве работ, посвященных методике обучения доказательству (А.А. Столяр, В.А. Далингер, Г.И. Саранцев и др.). Доказательство, проводимое дедуктивным методом, определяется как «выведение истинности какого-либо положения (на основании силлогистических законов) из других положений» [149, с. 877-878].

Ученые выделяют формальные (строгие) [115] и содержательные доказательства. Развитием знаний о формальных доказательствах занимается специальная ветвь математики - теория доказательства. При этом ученые отмечают невозможность представления учащимся современных «стандартов строгости» доказательств. Все школьные доказательства по существу представляют собой более или менее «убедительные рассуждения», основанные на здравом смысле. В методической литературе их обозначают термином «содержательное доказательство» (А.А. Столяр, В.А. Далингер, Г.И. Саранцев и др.). «Содержательное доказательство представляет собой обычное, заслуживающее доверия, рассуждение, указывающее лишь на существование формального доказательства и подсказывающее путь его построения» [115, с.188].

Анализ схемы 3 показывает, что привлечение к процессу работы с теоремами DGS, естественным образом меняет представление о смысловых значениях термина «доказательство», относящихся к его психологическим компонентам. Оно больше однозначно не связывается с дедуктивными

умозаключениями. Их роль в повышении убедительности утверждения начинают выполнять компьютерные эксперименты. Осознавая этот факт, зарубежные ученые развернули целую кампанию по поиску дополнительных смысловых значений доказательств, проведенных дедуктивным методом и имеющих образовательное значение. Итоги этой работы в период с 1990 по 2000 г.г. были подведены Дж. Ханной в обзорной статье [157, с.8]. Ею показано, что доказательства, кроме функции убеждения в истинности утверждения, выполняют и другие функции, которые должны быть освоены учащимися:

- проверка истинности утверждения (verification);
- объяснение, т.е. раскрытие причин истинности утверждения (explanation);
- демонстрация дедуктивного построения теории (systematization);
- открытие получением следствий (discovery);
- коммуникация, т.е. передача знаний для убеждения оппонентов в истинности (communication);
- построение эмпирической теории из отдельных фактов (construction of an empirical theory);
- исследование утверждения с целью раскрытия его смысла (exploration of the meaning of a definition or the consequences of an assumption);
- объединение хорошо известных связей с новыми знаниями для переосмысления (incorporation of a well-known fact into a new framework and thus viewing it from a fresh perspective).

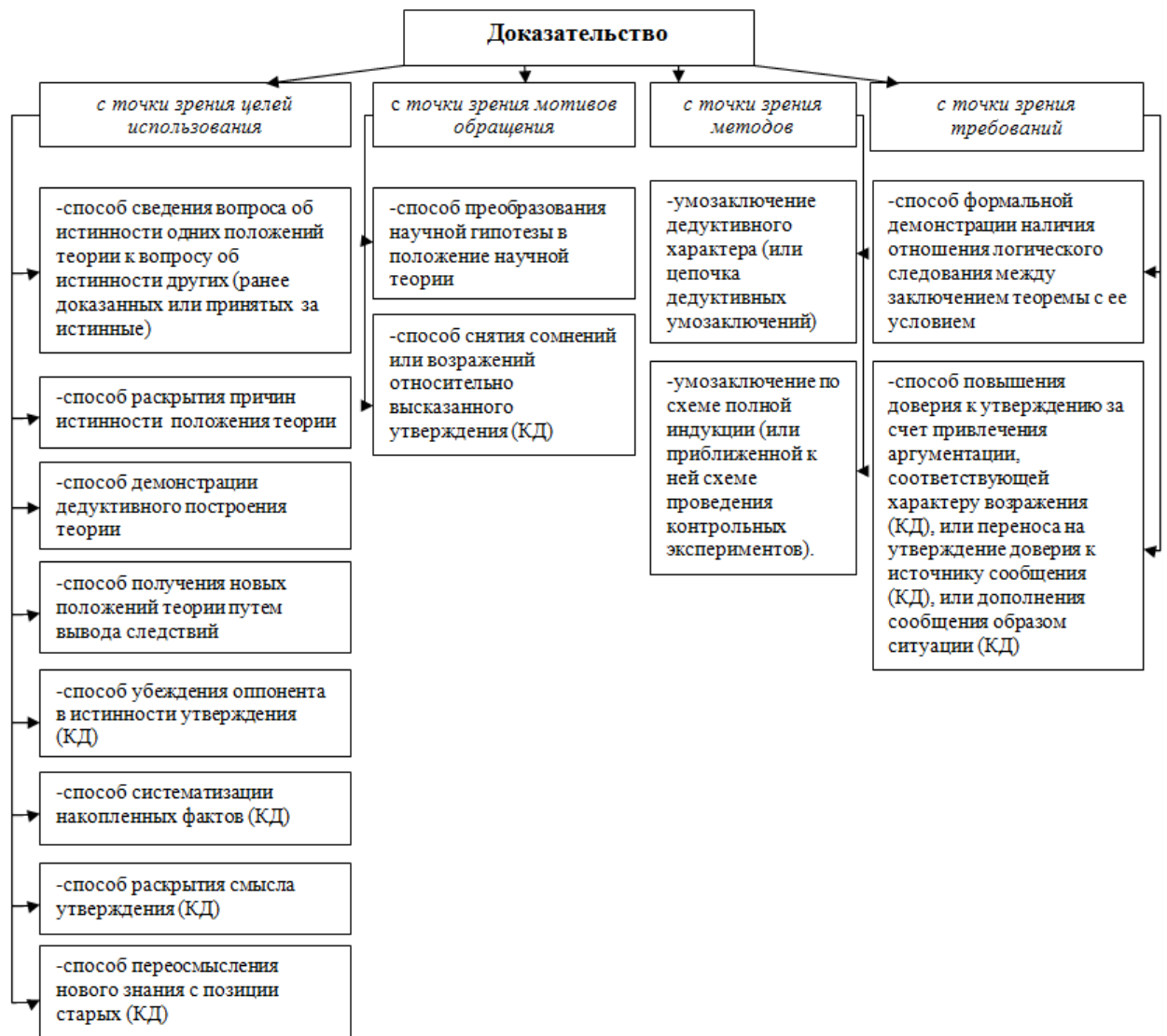
При этом Дж. Ханна отмечает, что начинать нужно с раскрытия перед учащимися объяснительной функции доказательств, т.к. в реализации этой функции им нет равных. В своей статье автор показывает, какое отражение получили в нормативных документах результаты обсуждения проблемы обучения доказательства учеными. В Принципах и Стандартах по математике, утвержденных Национальным советом учителей математики США и Канады (NCTM, 2000 г.) [166], а также в Британском национальном учебном плане (DfEE, 1999 г.) [156], утвержденном департаментом образования и занятости, были введены дополнительные требования к обучению рассуждениям и доказательствам: «...обучение доказательствам должно пронизывать все ступени

общего образования; результатом этого обучения должно стать признание учащимися рассуждений и доказательств как фундаментальных аспектов математики; учащиеся должны уметь не только выстраивать доказательные рассуждения, но и оценивать их, учитывая при этом различия стилей мышления оппонентов и возможность варьирования методов доказательства» [156].

Идеи, зафиксированные в Принципах и Стандартах математического образования США и Канады, высказывают и российские ученые, которые занимаются проблемой разработки обучения геометрии с DGS (В.А. Далингер, В.Н. Дубровский, С.Н. Поздняков, В.И. Рыжик, Т.Ф. Сергеева, И.С. Храповицкий, М.В. Шабанова, М.Г. Шабат). Так, например, В.И. Рыжик [101] отмечает, что чрезвычайно важно для школьного математического образования практически приемлемое толкование термина «доказательство». Он выделяет две основных роли данного понятия в процессе образования: проверка собственных предположений (возникших под влиянием разных причин: работы интеллектуальной интуиции, формулировки обобщений, формулировки обратных утверждений и т.д.), убеждение предполагаемого оппонента (ученика, учителя) в собственной правоте – при решении задачи, при ответе на возникающий вопрос и т. д. Выделение этих ролей позволяет увидеть, что доказательство, как способ проверки и способ убеждения, существенно зависит от того, кому предназначено доказательство и в какой ситуации это происходит. В связи с этим к способу проведения доказательств в разных ситуациях допустимо предъявлять разные требования и применять для проведения доказательств разные методы. В.И. Рыжик выделяет три уровня строгости доказательств: «светский», «пользовательский» и «теоретический». При этом он отмечает, что на первых двух уровнях допустимо использование компьютерных экспериментов. Так как на «светском» уровне доказательство выступает как метод убеждения оппонента в истинности высказанного тезиса, на «пользовательском» уровне доказательство выступает как метод проверки надежности используемого утверждения. Практика использования DGS приводят В.И. Рыжика и В.Н. Дубровского к необходимости сближения методологии доказательств, проводимых дедуктивным методом, с методологией компьютерных экспериментов за счет привлечения идеи

симметрии, непрерывности, а также возврата к идеологии Фалесовских доказательств, которые, в отличие от доказательств в «Началах» Евклида, опираются не на равенство треугольников, а на идею преобразования геометрических фигур [16, с.69]. Итак, можно говорить о расширении семантического смысла понятия «доказательство» в учебном процессе вследствие привлечения DGS (схема 4).

Схема 4.



Решение данной методической проблемы требует, в первую очередь, раскрытия содержания субъектного (доучебного) опыта учащихся, связанного с оценкой истинности утверждения. Эта задача решена нами в ходе констатирующего эксперимента (см. параграф 2.3.1). Здесь представим лишь

семантическую модель термина «доказательство», обусловленную содержанием этого опыта (схема 5).

Схема 5.



Наличие у учащихся субъектного опыта требует построения обучения доказательству геометрических утверждений с использованием идеи его интеграции с содержанием социокультурного опыта. А также решение данной методической проблемы требует анализа и переосмысления с новых позиций концептуальных основ обучения доказательству в школе. Мы считаем целесообразным начать этот анализ с оценки возможности использования определения понятия «обучение доказательству» в новых условиях.

Наибольшее распространение в методической литературе получило определение, данное Г.И. Саранцевым: «Обучение доказательству есть обучение учащихся анализу доказательства, его воспроизведению, самостоятельному открытию факта, поиску и конструированию его доказательства, а также опровержению предложенных доказательств» [74, с.8].

Аналогичное определение дает В.А. Далингер [60], не указывая при этом в качестве цели обучения доказательству обучение их опровержениям, т.к. достижение этой цели не предусмотрено большинством программ обучения геометрии в школе.

Подобные определения мы встречаем и у других авторов. Они различаются лишь целью, которая рассматривается ими в качестве приоритетной. Так, например, А.А. Столяр под обучением доказательству понимает «обучение мыслительным процессам поиска, открытия, построения доказательства, а не обучение воспроизведению и заучиванию готовых доказательств» [115, с.181].

Этими определениями содержание термина «доказательство» жестко не привязано к выбору в качестве метода доказательства формально-логических рассуждений (эту связь не предусматривает этимологическое значение термина). Данные определения характеризуют лишь виды деятельности, которыми должен овладеть учащийся в отношении доказательства: воспроизведение готовых доказательств, поиск способов доказательств и критический анализ доказательств. Это позволяет распространить данное определение и на доказательства, проводимые другими методами, в частности, методом компьютерного эксперимента.

Связь доказательств с дедуктивным методом прослеживается при описании учеными этапов обучения доказательству. Так, Т.М. Коринова, И.В. Суслова, А.В. Ястребов [44], выделяя три основных этапа, характеризуют их следующим образом: «Пропедевтическая подготовка к проведению доказательств начинается уже при обучении математике в V-VI классах. В этот период у учащихся складываются потребности в обосновании своих суждений, *начало дедуктивного мышления*, умения подмечать закономерности.

При изучении геометрии в VII классе появляются новые для школьника понятия: «аксиома», «теорема», «доказательство». Первоначально учащийся знакомится с доказательством теорем, которые предлагает учитель, не вовлекая учащихся в самостоятельный поиск... На этом этапе необходимо показать правильное построение умозаключений (силлогизмов): большая посылка – малая посылка – вывод.

Следующий этап в обучении доказательствам состоит в том, что учащиеся привлекаются к активной работе по поиску доказательств теорем, выбору рациональных методов и способов аргументации, выдвижению гипотез, поиску доказательства их истинности или ложности» [44, с.6].

В своей концепции Г.И. Саранцев более детально описывает поэтапный процесс обучения доказательствам, подтверждая правомерность уровней психологическими закономерностями возрастных изменений обучающихся (см. табл.3).

Процесс обучения доказательству является длительным и занимает весь период изучения систематического курса с введением логической пропедевтики в содержание обучения математике учащихся 5-6 класса. Саранцев Г.И. представляет этот процесс, состоящим из следующих уровней (табл.5).

Таблица 5.

Этапы процесса обучения доказательству по Г.И.Саранцеву.

Уровни обучения доказательству	Возрастной период
1) Формирование потребности в логических обоснованиях. 2) Формирование умения выполнять дедуктивные выводы.	V-VI классы
1) Обучение эвристическим приемам и их применению. 2) Обучение выполнению цепочки логических шагов.	VI-VII классы
1) Обучение самостоятельному разбору готового доказательства. 2) Формирование умения выделять идею доказательства.	VII класс
1) Обучение использованию методов научного познания. 2) Самостоятельное доказательство.	VII-VIII классы
1) Обучение умению опровергать предложенные доказательства.	IX-XI классы

Анализ содержания данной таблицы показывает, что несмотря на общий характер данного им определения, «обучение доказательству» он, следуя традициям Евклидовой геометрии, жестко связывает смысловое значение термина «доказательство» с дедуктивным методом. Возможности отхода от этих традиций при сохранении основного направления обучению доказательствам в школе создает когнитивно-визуальный подход В.А. Далингера. В разработке данного подхода В.А. Далингер [22] исходит из признания возможности установления истинности фактов средствами визуального мышления. Перечисляя функции рисунка в обучении, он отмечает, что «С помощью рисунка можно:...

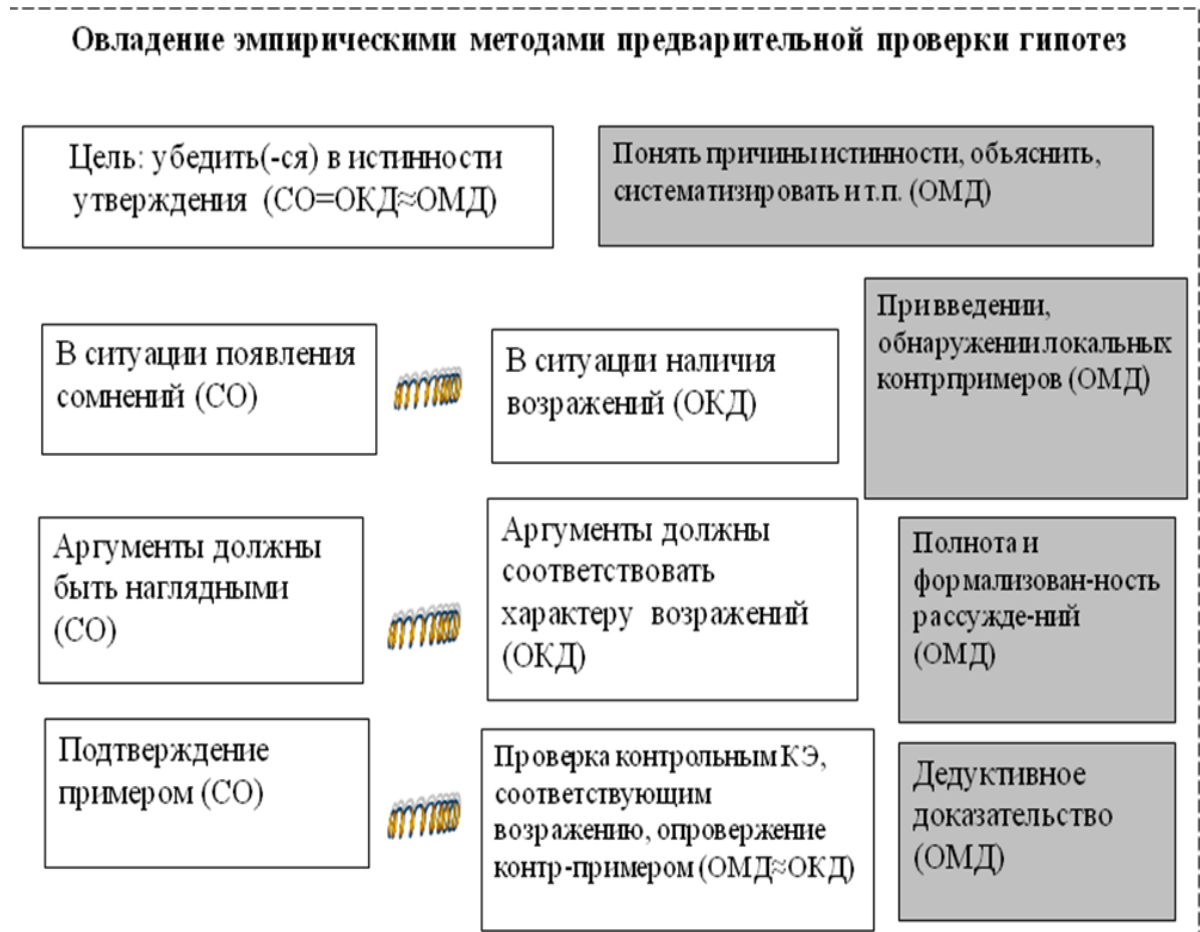
- проследить ход рассуждений, приводящих к искомому заключению;
- заменить абстрактные выкладки наглядным представлением факта;...
- наглядно иллюстрировать формулу» [22, с.55].

В своих выводах В.А. Далингера опирается на данные психологии в области исследования специфики визуального мышления (Д. Гильберт, М. Иден, С. Конн-Фоссен, Н.А. Резник). Механизмы функционирования визуального мышления

Н.А. Резник [5] описывает следующим образом: «Предварительно бегло рассматривая изображение (формулу, рисунок, отрывок учебного текста), учащийся перемещает взгляд от одной детали к другой, сравнивает их, возвращаясь к основным фрагментам, анализирует отдельные элементы...» [5, с.74]. Такая работа, по словам В.А. Далингера, «..позволяет опустить большинство из промежуточных логических операций, провести представление факта или его доказательства визуально без подробного текстового описания» [22, с.62]. Также он отмечает, что в процессе мышления проводниками рассуждения служат зрительные (визуальные) стандарты: «Визуальный стандарт – это такая визуальная или формульная интерпретация математического понятия, которая наиболее полно и точно отображает его словесную дефиницию. Формирование визуального стандарта может осуществляться последовательно, переходя от наивных представлений к полной его конструкции «в свернутом» виде» [22, с.63]. Таким образом, визуально-когнитивный подход В.А. Далингера, предоставляя возможность расширенного понимания термина «доказательство», ставит перед обучением доказательству в школе еще одну задачу: формирование визуальных стандартов, являющихся «проводниками» доказательных выводов.

При использовании DGS и основанных на них электронных образовательных ресурсов (ЭОР) обучение доказательству может быть представлено, как процесс, состоящий из трех основных этапов, характеризующихся достижением различных уровней овладения доказательством и разной степенью интеграции смысловых значений понятия «доказательство», входящих в содержание субъектного и социокультурного опытов:

I. Этап обучения эмпирической проверке геометрических утверждений. Характеризуется интеграцией составляющих субъектного опыта учащихся, связанного с оценкой истинности утверждений, которые характеризуют доказательство с точки зрения мотивов, методов и требований при сохранении естественной для учащихся цели проверки истинности утверждения и ведущего для них критерия убедительности «наглядность».



II. Этап обучения логическому контролю правильности алгоритма построения динамического чертежа для целей контрольного компьютерного эксперимента. Характеризуется включением в содержание субъектного опыта учащихся новой цели (убедить в правильности алгоритма построения), как дополнительной, а также соответствующей новой цели мотивов, методов и требований к обоснованию.

Схема 6.2



III. Этап обучения доказательству дедуктивным методом. Характеризуется замещением ведущего критерия убедительности критерием логической сводимости к истинным утверждениям, а также распространением освоенных приемов дедуктивного вывода на сами утверждения с демонстрацией приоритета данного метода по отношению к методу проверки утверждения контрольным экспериментом.

Схема 6.3



Поясним особенности предлагаемого нами уровневого подхода на примере методики работы с теоремами, относящимися в логике изучения курса геометрии основной школы к этапам, характеризующимся разными уровнями овладения доказательством.

Пример 1. Методика работы с теоремой о свойстве вертикальных углов (1-й уровень овладения доказательством).

Постановка проблемы (мотивация изучения теоремы).

Учащимся предлагается задание: выяснить, какое минимальное число углов, образованных пересечением двух прямых, необходимо задать, чтобы вычислить через них оставшиеся углы.

Выдвижение гипотезы (ознакомление с фактом теоремы или подведение к открытию).

Учащимся предлагается задание: измерить получившиеся при пересечении двух прямых углы и сформулировать гипотезу.

Проверка гипотезы.

По заданному алгоритму постройте в GeoGebra динамическую модель вертикальных углов.

- 1) Введите параметр α , величину одного из вертикальных углов

- 2) Постройте прямую АВ
- 3) Постройте угол $\angle BAV' = \alpha$
- 4) Постройте прямую АВ'

Придумайте и проведите с помощью этой модели эксперимент, подтверждающий справедливость геометрического утверждения о равенстве вертикальных углов.

Развитие теории и практики на основе полученного знания.

Учащимся предлагается задание: ответить на исходный вопрос задачи, а также выяснить, равны ли вертикальные углы, образованные тремя пересекающимися прямыми.

Пример 2. Методика работы с теоремой о свойстве высот треугольника (2-й уровень овладения доказательством).

Постановка проблемы (мотивация изучения теоремы).

Учащимся уже известна теорема о том, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке. Им предлагается развить идею этой теоремы, проверив, сохраняется ли взаимное расположение перпендикуляров к сторонам треугольника, если они проходят через противоположные к этим сторонам вершины.

Выдвижение гипотезы (ознакомление с фактом теоремы или подведение к открытию).

Для выдвижения гипотезы учащимся предлагается задание: выяснить, существует ли способ параллельного переноса (перетаскивания) точки О - точки пересечения и всех перпендикуляров, при котором они становятся высотами треугольника. Найти способ задания такого параллельного переноса. В результате выполнения задания учащиеся придут к следующему алгоритму задания вектора переноса:

- 1) Построить точку пересечения двух высот треугольника - точку Н.
- 2) Перенести всю конструкцию на вектор $\overrightarrow{ОН}$.

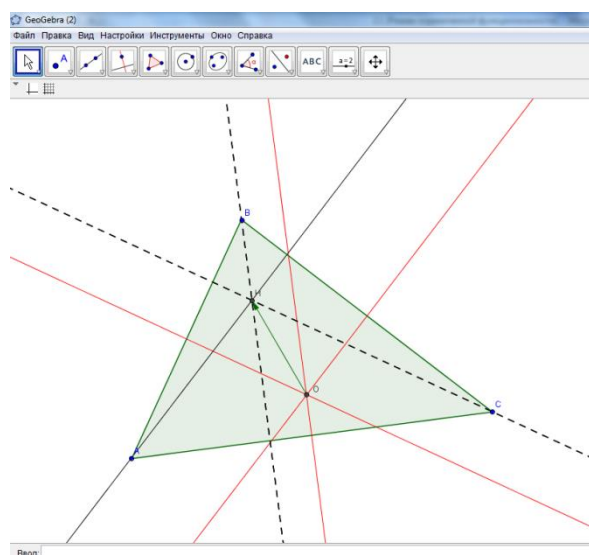


Рисунок 28.

Доказательство. Проведение доказательства учащимися заключается в следующем: третий перпендикуляр также является высотой треугольника.

Развитие теории и практики на основе полученного знания (применение теоремы; установление связей изучаемой теоремы с другими теоремами; составление новых задач, вытекающих из доказанного утверждения).

Учащимся предлагается задание: выяснить, пересекаются ли в одной точке медианы треугольника.

Пример 3. Методика работы с теоремой о свойстве диагоналей ромба (3-й уровень овладения доказательством).

Постановка проблемы (мотивация изучения теоремы).

Известно, что ромб является разновидностью параллелограмма, поэтому обладает всеми его свойствами. Исследуйте, какими особыми свойствами обладает ромб.

Выдвижение гипотезы (ознакомление с фактом теоремы или подведение к открытию).

Поскольку свойства ромба устойчивы по отношению к изменениям параметров, задающих эту фигуру, то для проведения исследования учащимся может быть предложено построить динамическую модель ромба, заданную, например, длиной стороны и острым углом.

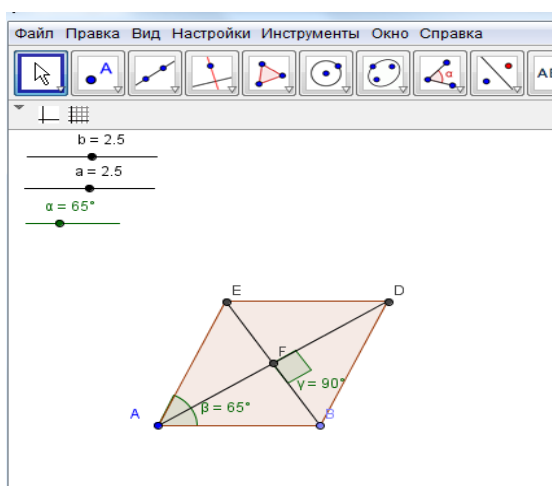


Рисунок 29.

Для наблюдения за изменением или сохранением его свойств, при изменении параметров, можно предложить вывести на экран все интересующие исследователя геометрические величины. В результате индивидуальных компьютерных экспериментов учащимися будет выдвинут целый набор гипотез (диагонали являются биссектрисами углов, диагонали взаимно перпендикулярны и др.).

Доказательство. При оказании помощи учащимся для обнаружения возможности доказательства свойств ромба с опорой на свойства равнобедренного треугольника может быть использована визуализация.

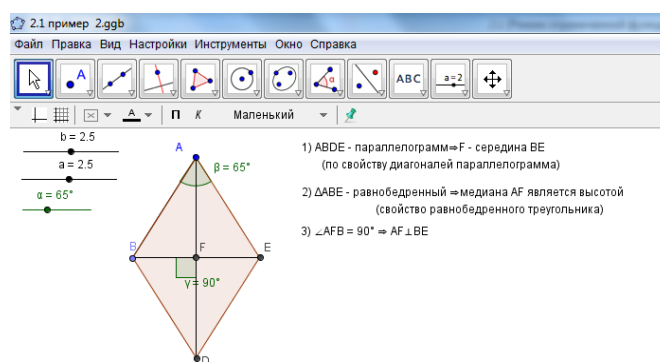


Рисунок 30.

Развитие теории и практики на основе полученного знания.

Учащимся предлагается задание: сформулировать на основе доказанных свойств признаки ромба.

Принцип концептуального единства исследований требует от нас согласования предлагаемого нами подхода к обучению доказательствам с подходами, принятыми научными сообществами: к обучению доказательствам

дедуктивным методом (В.А. Далингер, Г.И. Саранцев, А.А. Столяр и др.), к обучению геометрии с использованием DGS (В.Н. Дубровский, В.И. Рыжик, Т.Ф. Сергеева, И.С. Храповицкий, М.В. Шабанова, Г. Шуман и др.). Наиболее развернуто уровневый подход к обучению доказательствам дедуктивным методом представлен у Г.И. Саранцева. Соотнесем с предложенной им схемой выделенные нами уровни обучения доказательству, а также уровни обучения В.И. Рыжика (см.табл.6).

Таблица 6.

Уровни обучения доказательству с использованием DGS

Уровни и подуровни обучения с ИГС		Уровни обучения логическим доказательствам (по И.Г.Саранцеву)	Уровни обучения геометрии с DGS (по В.И.Рыжик).
Уровень овладения эмпирическими методами проверки утверждений (5-6-начало 7 класса)	Формирование потребности в экспериментальной проверке утверждения	Формирование потребности в логических обоснованиях (<i>акцент на обоснование утверждения</i>)	Уровень наблюдения.
	Формирование умения проводить компьютерные эксперименты, делать выводы адекватные собранным данным.	Формирование умения выполнять дедуктивные выводы.	
	Обучение планированию компьютерных экспериментов.	Обучение эвристическим приемам и их применению.	
Уровень овладения логическими методами контроля корректности технических средств, применяемых в ходе компьютерного эксперимента (7 - 8 класс)	Обучение критической оценке программ экспериментальной проверки утверждений.		
	Формирование потребности в логическом обосновании корректности построения динамического чертежа, используемого для компьютерной проверки утверждения.	Формирование потребности в логических обоснованиях (<i>акцент на обоснование способа проверки</i>).	
	Обучение логическому обоснованию корректности алгоритма построения динамического чертежа, используемого для компьютерной проверки утверждения.	Обучение выполнению цепочки логических шагов.	
Уровень овладения дедуктивным методом доказательства (конец 8 – 9 класс)	Формирование потребности в логическом объяснении логических утверждений, прошедших экспериментальную проверку.	Формирование потребности в логических обоснованиях (<i>акцент на объяснение факта истинности утверждения</i>).	Уровень объяснения.

	Обучение разбору и воспроизведению готового логического объяснения (доказательства).	Обучение самостоятельному разбору готового доказательства.	
	Формирование умения выделять идею логического объяснения (доказательства).	Формирование умения выделять идею доказательства	
	Обучение поиску идеи логического объяснения (доказательства) на основе визуальных подсказок, создаваемых средствами ИГС.	Обучение использованию методов научного познания.	
	Обучение самостоятельному построению логического объяснения (доказательства).	Самостоятельное доказательство.	
	Обучение умению опровергать логическое объяснение (доказательство).	Обучение умению опровергать предложенные доказательства.	

Предлагаемый нами подход согласуется и с результатами исследований проблемы обучения математическим доказательствам за рубежом, которые, как нами было показано в параграфе 1.2, нашли отражение в Британском национальном учебном плане, утвержденном Департаментом образования и занятости (DfEE, 1999), а также в Принципах и Стандартах математического образования США и Канады, утвержденных Национальным советом преподавателей математики (NCTM, 2000).

Наиболее значимыми для нас положениями этих нормативных документов являются:

- отнесение этапа изучения доказательств дедуктивным методом в «евклидовом смысле» к 14-16 годам (7-9 класс);
- усиление внимания к объяснительной функции доказательств (на общеобразовательной ступени);
- формирование умения учащихся осуществлять осознанный выбор методов доказательства истинности утверждений на основе сравнительной оценки возможностей, предоставляемых эмпирическими и теоретическими методами.

Приведем в качестве доказательства цитаты из документов (см. таблицу 7):

Таблица 7.

NCTM, 2000	DfEE, 1999
«Reasoning and Proof Standard Instructional programs from pre-kindergarten through Grade 12 should enable students to • recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics • make and investigate mathematical conjectures • develop and evaluate mathematical arguments and proofs • select and use various types of reasoning and methods of proof».	«... the programmes of study include geometrical reasoning as well as a reasoning component of the 'Using and applying' attainment target. Even at the 'foundation' level at Key Stage 4 (for the lower attaining 14-16 year olds), students are to be taught to distinguish between practical demonstrations and proofs and to show step-by-step deduction in solving a geometrical problem (DfEE 1999:78)»
[перевод] «...учебные программы должны позволить обучающимся: • признать рассуждения и доказательства, как фундаментальные аспекты математики; • уметь выдвигать и исследовать математические гипотезы;	[перевод] «...программы обучения включают геометрическое рассуждение, также умение рассуждать является целью в разделе "Использование и применение". Даже на базовом уровне на 4 ключевом этапе (от 14-16 лет), учащиеся будут учиться выбирать между

• разрабатывать и оценивать математические аргументы и доказательства • выбирать и использовать различные типы мышления и методы доказательства»	практическими демонстрациями и доказательствами, и дедуктивно обосновывать шаг за шагом решение геометрической задачи»
---	--

Процесс обучения доказательству является длительным процессом, который должен быть развернут во времени и согласован с процессом интеллектуального развития учащихся. На этот факт обращают внимание все исследователи данной проблемы в России и за рубежом (В.А. Далингер, Г.И. Саранцев, А.А. Столяр, З.И. Слепкань, Дж. Ханна, Ю. Рав, и др.). Попробуем обосновать ориентировочные возрастные границы реализации предлагаемой нами схемы обучения доказательству, представленной в таблице 6.

Началом обучения доказательству является тот возраст, когда у детей возникает естественная потребность в поиске обоснования утверждений, предъявляемых учителем или сформулированных учебной литературой. Известный российский психолог Р.С. Немов [69] считает, что «нежелание все принимать на веру» возникает у детей в младшем подростковом возрасте (5-6 класс): «Подростки обнаруживают широкие познавательные интересы, связанные со стремлением все самостоятельно перепроверить, лично удостовериться в истинности. К началу юношеского возраста такое желание несколько уменьшается, и вместо него появляется больше доверия к чужому опыту, основанному на разумном отношении к его источнику...» [69, с.29].

В связи с тем, что в этом возрасте ведущим типом мышления является эмпирический [20], данная потребность учащихся младшего подросткового возраста реализуется через перепроверку утверждений наблюдениями и экспериментами.

Становление логических компонентов мышления на базе образных может быть развернуто во времени в соответствии с возрастной периодизацией развития. Многочисленными исследованиями психологов (Ж. Пиаже [82], Р. Солсо [112], Д. Халперн [126]) установлено, что становление логических компонентов мышления осуществляется в подростковом периоде (от 11-12 лет и старше) и в основном складывается к

14 годам. Так, например, Ж. Пиаже описывает процесс становления логических компонентов мышления следующим образом: «...Становление формального мышления происходит в юношеский период...Характерное для юношества рефлексивное мышление зарождается с 11-12 лет, начиная с момента, когда объект становится способен рассуждать гипотетико-дедуктивно, т.е. на основе одних общих посылок, без родимой связи с реальностью и собственными убеждениями, иными словами, отдаваясь необходимости самого рассуждения в силу одной его формы (*viformae*), в противоположность согласованию выводов результатами опыта» [82, с.68].

Приведенные данные позволяют говорить о необходимости создания методических условий в процессе обучения геометрии, обеспечивающих формирование у учащихся с 5 по 7 класс умений, относящихся к первым двум уровням овладения доказательствам. Обучения учащихся 8-11 классов в связи со становлением рефлексивных составляющих мышления должно быть ориентировано на обучение дедуктивному методу доказательства, включая опровержение таких доказательств и их самостоятельное построение. Психологами также установлено, что и после становления логических компонентов мышления визуальное мышление продолжает играть важную роль в интеллектуальной деятельности. Это доказывает необходимость, целесообразность привлечения компьютерных визуализаций на этапе обучения доказательству дедуктивным методом. Приведем в подтверждение цитату из монографии В.А. Далингера [22, с.25]: «Основную функцию визуального мышления психологи усматривают в его способности упорядочивать значения образов». Р. Арнхейм [3] полагает, что никакую информацию о предмете не удастся непосредственно передать, пока этот предмет не будет представлен в структурно ясной форме: «В ходе такого мыслительного процесса запутанная и бессвязная ситуация с неопределенными отношениями структурно перестраивается, организуется и упрощается, пока наградой разума за труд не станет образ, который делает знание видимым» [3, с.25]. Связь визуального мышления с внешней

практической деятельностью описывается с помощью уточненной концепции интериоризации. Умственная деятельность, согласно этой концепции, при определенных условиях поэтапно осуществляется, отталкиваясь от внешней предметной деятельности. «Можно выделить три этапа формирования идеального образа сознания. Первый – снятие операционной копии с объекта, его моделирование в системе предметно-практических операций... На втором этапе внешние предметные действия превращаются во внутренние. Рождается интеллектуальная деятельность, которая есть уже оперирование не с реальными объективными предметами, а с их умственными репрезентациями... Третий этап характерен для вербального и синтетического мышления» [22, с.25].

Несмотря на то, что обучение доказательству на данном уровне не предполагает обращения к компьютерному эксперименту, как к методу подтверждения истинности геометрического факта, DGS может быть использована и здесь в рамках реализации когнитивно-визуального подхода к обучению доказательствам, предложенного В.А. Далингером [23].

Главной идеей этого подхода является предоставление учащимся наглядной опоры логических действий:

- 1) синтеза образа геометрической конструкции, заданной условием теоремы (задачи);
- 2) преобразования исходного образа геометрической конструкции (выявление скрытых отношений, введение дополнительных построений, изменение взаимного положения частей конструкции);
- 3) выделение части геометрической конструкции для подведения ее под новое понятие;
- 4) выделение набора элементов геометрической конструкции, свойства которых являются посылкой логического вывода;
- 5) конструирование последовательности сменяющих друг друга образов для иллюстрации процесса перехода к пределу.

Главным достоинством DGS в реализации когнитивно-визуального подхода является возможность анимирования процесса построения и изменения динамического чертежа, что позволяет создавать наглядную опору не только для отдельного шага доказательства, но и всего хода доказательства в целом.

Выводы из параграфа. Таким образом, привлечение DGS к методике работы с теоремой приводит к существенному расширению образовательно-значимой семантики термина «доказательство» за счет дополнения смысловых значений, относимых к опыту доказательства утверждений в математике значениями, относящимися к социокультурному опыту коммуникативной деятельности. Наличие у учащихся субъектного опыта, связанного с оценкой истинности утверждений, требует реализации идеи интеграции социокультурного и субъектного опытов в процессе обучения математики. При этом в процессе обучения доказательству учащихся основной школы целесообразно реализовывать уровневый подход, характеризуемый достижением различных этапов овладения доказательством и разной степенью интеграции смысловых значений понятия «доказательство», входящих в содержание субъектного и социокультурного опытов (модель обучения использованию дедуктивного метода в сочетании методом компьютерного эксперимента, проводимого средствами DGS представлена на схемах 6.1-6.3.

На каждом из этапов компьютерные эксперименты, проводимые средствами DGS, и дедуктивный метод используются с разной степенью и различными целями при проверке, доказательстве, опровержении гипотез (см. табл. 8):

Таблица 8.

Этапы обучения доказательству учащихся основной школы	Роль компьютерных экспериментов в DGS и дедуктивных методов
<i>этап обучения эмпирической проверке геометрических утверждений (7 класс, тема «Начальные геометрические сведения»)</i>	Контрольные компьютерные эксперименты являются основным методом проверки правильности утверждений. Дедуктивные методы не используются.
<i>этап обучения логическому контролю правильности алгоритма построения</i>	Контрольные компьютерные эксперименты являются основным методом проверки

<i>динамического чертежа для целей контрольного компьютерного эксперимента (7 класс, начиная с темы «Треугольники»)</i>	правильности утверждений. Дедуктивные методы применяются для обоснования корректности работы динамической модели, применяемой в ходе компьютерного эксперимента.
<i>этап обучения доказательству дедуктивным методом(8 - 9 класс)</i>	Дедуктивные методы являются основными для обоснования истинности утверждения. Контрольные компьютерные эксперименты выполняют вспомогательную роль, т.е. используются для предварительной проверки гипотезы. Компьютерные визуализации используются для облегчения понимания логики доказательств.

2.2 Условия и механизмы реализации в основной школе модели поэтапного обучения доказательству с использованием DGS GeoGebra

Целью данного параграфа является описание педагогических условий и механизмов реализации представленной нами в параграфе 2.1 модели поэтапного обучения доказательству в курсе геометрии 7-9 класса в контексте исследовательского подхода к работе с теоремами геометрии (см. параграф 1.2).

Основными целями обучения доказательству являются:

1) формирование представлений учащихся о двух основных функциях доказательств: *проверки* и *объяснения* (Дж. Ханна) с постепенным выработкой потребности в дополнении экспериментальной проверки утверждения, которая является естественной для учащихся 7-9 классов (как показал констатирующий эксперимент) и обусловленной психологическими новообразованиями подросткового возраста логическим объяснением (В.И. Рыжик, И.Г. Саранцев);

2) формирование у учащихся умений самостоятельно осуществлять экспериментальную проверку утверждений с использованием DGS, а также понимать и воспроизводить логические рассуждения, приводимые в качестве объяснительной основы, зафиксированной экспериментом закономерности (И.Г. Саранцев), с опорой на компьютерную визуализацию идей или шагов доказательств (В.А. Далингер).

Анализ содержания ФГОС ООО показывает, что образовательные результаты, определяемые данными целями обучения, относятся к

метапредметным: «Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы основного общего образования должны отражать:

б) умение... строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное...) и делать выводы;

9) умение... формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение» [121, с.7].

Кроме того, эти умения входят в состав учебно-познавательной компетенции, связанной с проведением учебных исследований. Этот факт подтверждается результатами исследований Л.В. Форкуновой [124], М.В. Тарановой [117] и др.

С опорой на данные психологии в этих исследованиях доказано, что в *среднем школьном возрасте* (7-9 класс) формируется потребность в обоснованиях и опровержениях математических утверждений. Данный факт объясняется новообразованиями подросткового возраста, одним из которых является «чувство взрослости» [69, с.153]. Этот возрастной период характеризуется психологами (А.Н. Леонтьев, А.В. Петровский, Д.Б. Эльконин и др.) как возраст, в котором ведущим видом деятельности становится *общение со сверстниками*. Исследованиями в области генетической психологии (в частности школы Ж. Пиаже) утверждается, что «умение доказывать и опровергать возникает в общении ребенка с другими людьми, в споре с ними, побуждающем взглянуть на свою мысль со стороны и искать способы сделать ее убедительной для других, преодолев тем самым эгоцентризм — познавательную позицию, выраженную в прикованности субъекта к собственным представлениям, в его неспособности соотнести их с иными мнениями» [82, с. 98]. На этой основе Л.В. Форкуновой показано, что на базе сформированных умений осуществлять практические исследовательские действия (проводить опыты, наблюдения, эксперименты) формируются такие составляющие исследовательской компетенции, как интеллектуальные исследовательские умения и знания о правилах их

осуществления: умения планировать эксперимент, анализировать и классифицировать собранную информацию, выделять главное и исключать второстепенное, обобщать данные, выбирать вид представления информации и т.д. Кроме того, развивается готовность к работе в исследовательской группе [124]. При этом под исследовательской компетенцией Л.В. Форкунова понимает *интегративное качество личности, определяющее его готовность и способность к осуществлению в той или иной форме исследовательской деятельности*. Эта компетенция относится к надпредметным и развивается на базе исследовательского поведения и качеств, относимых к ключевым образовательным компетенциям.

Для достижения этих целей в процессе обучения геометрии должна реализовываться модифицированная методика работы учителя с теоремами и задачами на доказательство, содержание которой определяется этапными целями обучения доказательству (см. параграф 2.1).

Теоретическую основу такой методики, по нашему мнению, может составлять *идея интеграции* субъектного и социокультурного опытов, на которую опираются ряд технологий личностно-ориентированного обучения (В.В. Богун, В.Н. Осташков, Е.И. Смирнов, И.С. Якиманская и др.), получивших реализацию в методических исследованиях, связанных с обучением геометрии (Н.С. Подходова, О.Л. Безумова и др.).

Авторы концепции фундирования личностного опыта в процессе обучения математики [67] отмечают, что «В процессе восприятия взаимодействие информации, хранящейся в памяти и свежих следов, полученных в данном процессе восприятия от того же воспринимаемого объекта. Индивидуальный опыт, зафиксированный в памяти, оказывает огромное влияние на процесс и результаты восприятия.» [67, с.84]. Значимым элементом процесса восприятия они называют «...наличие узловых, опорных, характерных, специфических свойств и качеств объектов восприятия, будь то приемы деятельности, отражающие отдельное математическое знание или организованный набор знаний (это может быть

доказательство теорем, раздел курса математики во всем многообразии логических связей, материалы отдельного урока или лекции» [67, с.100]. Основной задачей разрабатываемой ими технологии является формирование этих узловых, опорных качеств объекта восприятия.

Говоря о преемственности школьного и вузовского содержания математического образования, авторы доказывают, что знания, умения и навыки, приобретенные студентами в школе, должны пройти «...послойное фундирование в различных теоретических дисциплинах» [67, с.134]. При этом под фундированием они понимают «...процесс приобретения, освоения и преобразования опыта личности при создании механизмов и условий (психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических) для актуализации и интеграции базовых учебных элементов, школьных и вузовских знаний и видов деятельности с последующим теоретическим обобщением и расширением практического опыта освоения структурных единиц» [67, с.135]. Анализ данного определения позволяет наметить следующую методическую схему фундирования опыта личности: актуализация базовых элементов опыта личности, их интеграция с базовыми элементами содержания образования, теоретическое обобщение освоенных элементов содержания, формирование практического опыта их использования. Предлагаемый авторами подход относится к области реализации программ профессиональной подготовки учителя математики. Возможность послойного фундирования определяется спецификой методологической формы познавательной деятельности обучающихся в вузе. В монографии М.В. Шабановой показано, что ведущей формой математического познания в вузе является квазиэмпирическое, т.е. «...познание, состоящее в последовательном обобщении одних теорий другими, способом сходным с процессом эмпирического познания» [130, с.69]. Курс геометрии, изучаемый в основной школе, предполагает реализацию иной формы познания «метаэмпирического познания с элементами дедукции» [130, с.71]. Для данной формы познания характерно

получение новых математических утверждений на основе индуктивного обобщения с последующим использованием дедукции в качестве метода установления истинности фактов, не допускающих практическую проверку, установление порядка на множестве фактов с целью снижения их количества, проверяемых практикой. Эта форма познания не позволяет осуществлять подъем по уровням математических теорий, который предполагает реализацию технологии фундирования опыта личности.

Большое распространение в методике обучения геометрии на уровне общего образования получила технология личностно-ориентированного обучения И.С. Якиманской, которая нашла свое отражение и развитие в трудах Н.С. Подходовой, Н.Л. Стефановой, Н.Б. Истоминой, О.А. Ивановой и др. В своей монографии [151] И.С.Якиманская убедительно показала, что процесс обучения следует рассматривать не как процесс «передачи подрастающим поколениям накопленного обществом опыта» [24, с.5], а как процесс взаимодействия, «согласования» субъектного опыта учащегося с общественным. При этом под субъектным опытом понимается «изначально индивидуально присущая организация умственной и практической деятельности, имеющая определенные источники, содержание, структуру и функции» [151, с.5]. Содержание субъектного опыта, по данным И.С. Якиманской, представлено предметами познания действительности (представлениями, понятиями); операциями и приемами действий (умственных и практических), правилами их выполнения; эмоциональными кодами (личностными смыслами, ценностями, установками, стереотипами). Все эти элементы в субъектном опыте находятся во взаимосвязях разного типа: ассоциативных, функциональных, логических, определенных контекстами их формирования и использования. Под социокультурным опытом при этом понимается опыт, накопленный обществом в процессе исторического развития, объективизированный в системе научных положений, отобранный в соответствии с целями обучения и представленный учащимся в виде учебного материала (теоретических положений, образцов

решения задач, рекомендаций и правил осуществления действий, ответов, критериев оценки учебных достижений учащихся). В процессе интеграции субъектного и общественного опыта И.С. Якиманская выделяет три основных этапа (см. 1 столбец таблицы 9).

Наш выбор теоретической основы построения методики обучения доказательству с использованием DGS определяется тем, что *опыт доказательства* (обоснования или опровержения) высказанных или услышанных учащимися утверждений включен в субъектный опыт учащихся, накопленный к 7 классу (как показывают результаты констатирующего эксперимента, см. параграф 2.3) [132, 134, 142].

Мы будем рассматривать интеграцию субъектного и общественного опыта доказательства утверждений при обучении геометрии в основной школе с использованием DGS в глобальном и локальном смысле. В **глобальном** - при определении методической схемы для реализации каждого из этапов обучения доказательству. В **локальном** - при построении методической схемы работы с каждой задачей на доказательство и каждой теоремой. Эти методические схемы представлены таблицей 9.

Таблица 9.

Этапы интеграции по И.С. Якиманской	Глобальная методическая схема интеграции	Локальная методическая схема интеграции
Актуализация субъектного опыта учащихся	Включение учащихся в деятельность проверки утверждений тем способом, который согласуется с содержанием их субъектного опыта	Включение учащихся в самостоятельную деятельность проверки утверждения на основе субъектного опыта
Раскрытие содержания субъектного опыта учащихся.	Создание условий для вербализации этих способов, оценки степени их субъективной убедительности.	Включение учащихся в деятельность вербализации тех элементов содержания опыта, которые являются предметом интеграции, создание условий их переоценки
«Окультуривание» содержания субъектного опыта учащихся через его сопоставление с социокультурным образцом и переосмысление.	Предъявление учащимся способа, позволяющего повысить убедительность проверки.	Предъявление учащимся общественных образцов, включение их в деятельность сопоставления их с выявленными элементами субъектного опыта учащихся.

Формирование нового субъектного опыта учащихся.	Введение новых правил проверки утверждений, включение учащихся в деятельность их освоения	Включение учащихся в самостоятельную деятельность их применения в данной и сходных ситуациях.
---	---	---

Рассмотрим конкретный пример реализации представленной таблицей методической схемы в **локальном смысле**.

Пример 1. Методика работы с утверждением «Угол может принимать любые значения из промежутка от 0° до 180° » (7 класс).

Цель обучения доказательству: формирование представлений о количестве экспериментальных проб, которые необходимы для проверки утверждений общего характера методом компьютерного эксперимента.

1. **Постановка проблемы.** Мотивом установления границ изменения значений угла может являться работа по измерению величины угла транспортиром со шкалой от 0° до 360° , которая вызывает у учащихся сложности, связанные с неправильным использованием этого измерительного инструмента. Подобные трудности могут возникнуть у учащихся и при измерении углов средствами ИГС.

2. **Выдвижение гипотезы.** Для подведения учащихся к открытию теоремы следует обратить их внимание на то, что два луча с общим началом, вообще говоря, задают два угла, меньший из которых называется внутренним или просто углом, а больший - внешним. Для выяснения вопроса о том, какие значения может принимать внутренний угол, целесообразно включить учащихся в деятельность измерения углов в ИГС, введя запрет инструменту на измерение внешнего угла.

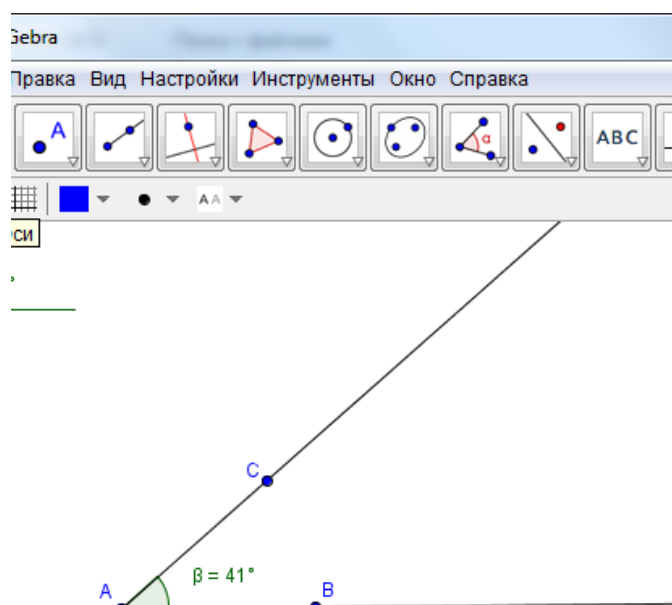


Рисунок 31.

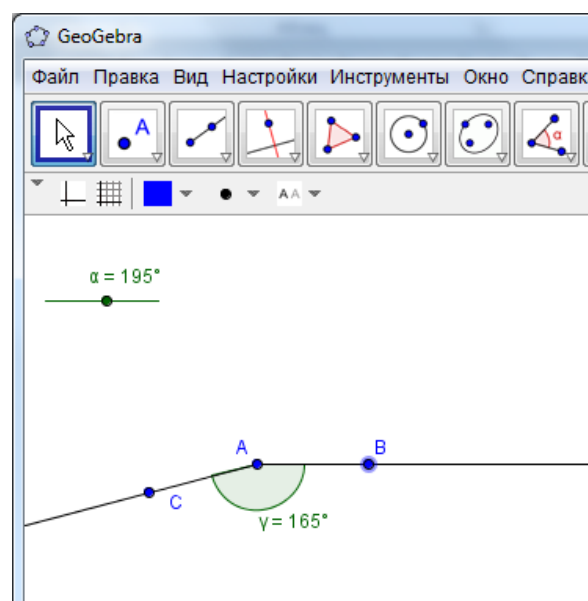


Рисунок 31'.

3. Проверка гипотезы.

В целях актуализации субъектного опыта учащихся, связанного с наглядно-эмпирическим подтверждением справедливости утверждений, учащимся предлагается следующее задание.

Задание 1. Придумать способ наглядной демонстрации средствами GeoGebra справедливости данного геометрического утверждения.

Результатом выполнения этого задания будут различные варианты динамических чертежей, созданных учащимися, и способов их использования. Наиболее типичными являются следующие варианты:

1. Учащийся изображает в графическом поле острый, прямой и тупой углы с помощью инструментов  **луч** и измеряет их величины инструментом  **угол** (рис.32). Делает на основе измерений вывод о том, что раз результаты измерений не выходят за указанные в утверждении границы, то оно верно.

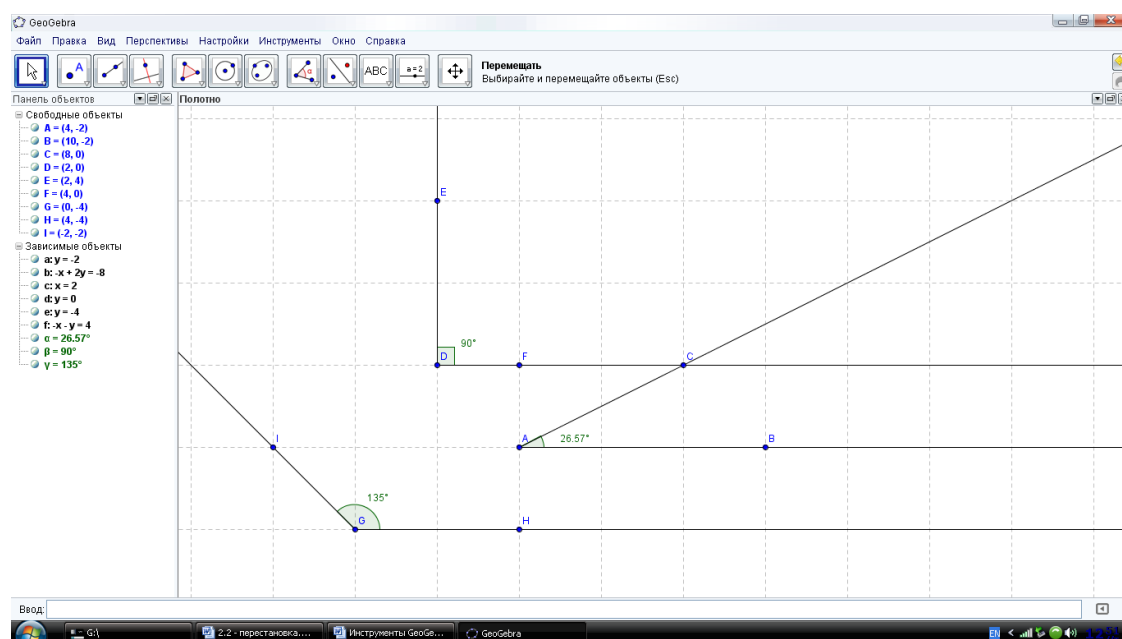


Рисунок 32.

2. Учащийся изображает в графическом поле один угол с помощью инструмента  **луч** и измеряет их величины инструментом  **угол**. Перемещая одну из точек, задающих сторону угла, показывает, что угол может принимать разные значения. При этом, если учащийся не учитывает возможность измерения внешней области угла, то может прийти к заключению о ложности утверждения (рис.33).

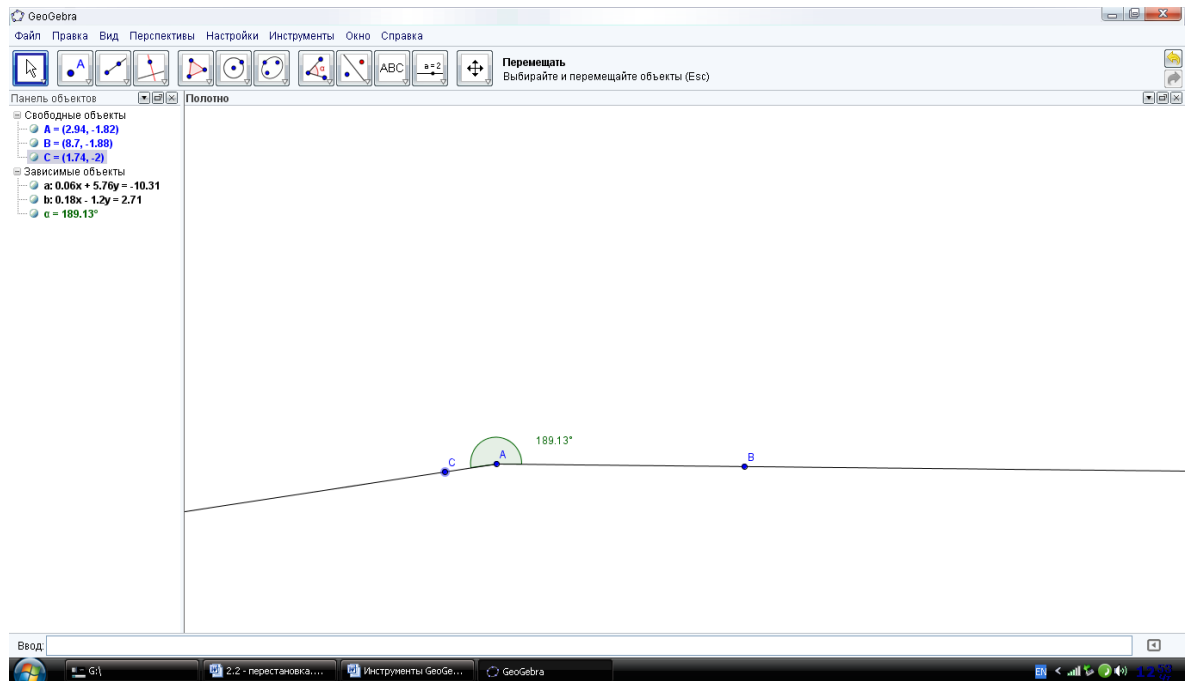


Рисунок 33.

3. Учащийся вводит в рассмотрение параметр, задающий величину угла с помощью инструмента $\xrightarrow{a=2}$ **ползунок**, и изображает в графическом поле угол с помощью инструмента  **угол заданной величины** (рис.34). Такое построение позволяет проверить утверждение путем задания направленного изменения ползунка на избранном промежутке допустимых значений. Если учащиеся задают промежуток $[0^\circ; 180^\circ]$, тогда приходят к выводу о справедливости утверждения. Если же границы множества значений параметра остаются теми, которые определены инструментом по умолчанию, и в свойствах объекта не введен запрет на измерение внешней области угла (рис. 34 - 35), то результаты эксперимента приводят их к заключению о ложности утверждения.

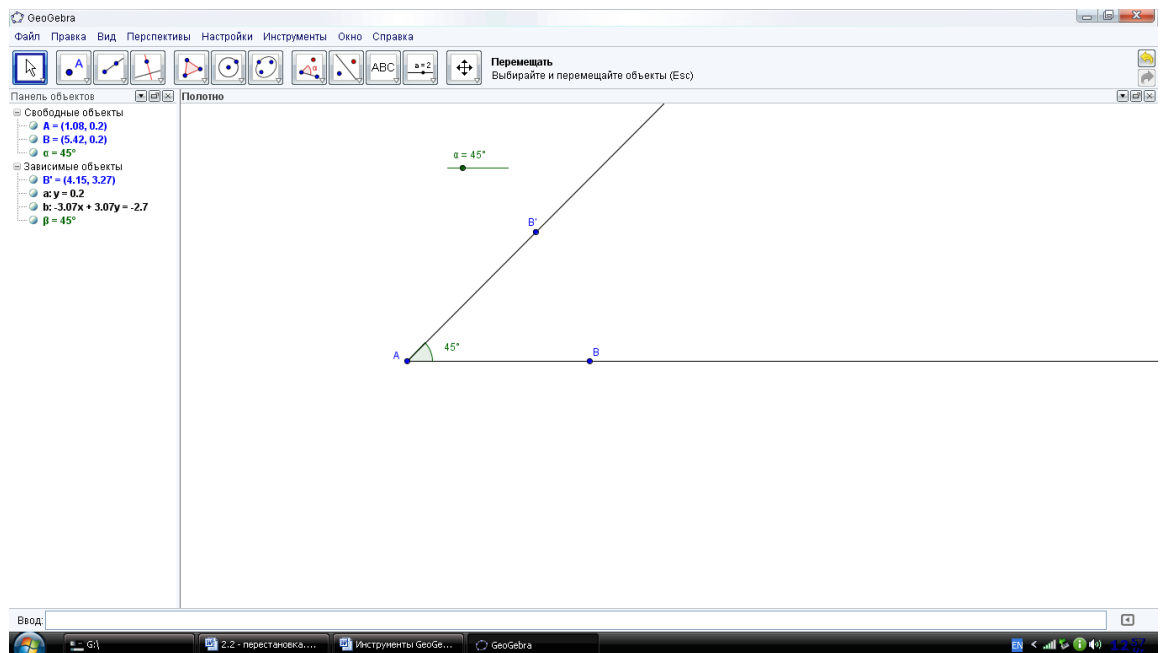


Рисунок 34.

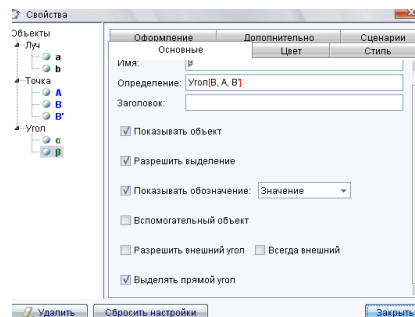


Рисунок 35.

Раскрытие содержания субъектного опыта учащихся происходит в результате сбора данных о многообразии способов проведения компьютерного эксперимента (на этом этапе планы не должны подвергаться критике). С целью создания ситуации, подводящей учащихся к необходимости переоценки субъектного опыта, перед ними может быть поставлено задание на установление соответствия между предложенными планами проведения экспериментов и дополнительными утверждениями, истинность которых они подтверждают.

Задание 2. Установить соответствие между выводами, представленными в столбце 2 и описанием экспериментов, представленных в столбце 1 таблицы 10.

Таблица 10.

Эксперимент	Вывод
1. Углы бывают острые, тупые и прямые	Угол может принимать значения из

(рис.32). Значит ...	промежутка от 0° до 180° , но не исключено, что он не может принимать и другие значения.
2.Измеряя величины разных углов, я вижу, что все они попадают в промежуток от 0° до 180° . Значит ...	Угол всегда принимает значения из промежутка от 0° до 180° , но возможно, не все.
3. Величина построенного угла пробегает все значения от 0° до 180° . Значит...	Угол может принимать любые значения из промежутка от 0° до 180° , и никакие другие.
4. Величина, задающая взаимное расположение сторон угла, может быть любой, например, пробегать значения от 0° до 180° и более. Но измерения показывают, что каждой из них величина угла остается в пределах от 0° до 180° . Значит...	Угол может принимать любые значения из интервала от 0° до 180° и никакие другие.

Результатом выполнения этого задания является выбор эксперимента, обеспечивающего планомерность и полноту перебора вариантов (№ 4, столбец 1).

Вид эксперимента создает основу для раскрытия содержания на этапе «окультуривания» опыта парных категорий: «общее/единичное утверждение», «планомерный/стихийный перебор», «полный/неполный перебор», а также позволяет ввести методические требования к описанию хода эксперимента, которые позволят контролировать полноту и планомерность перебора.

Задание 3. Занесите данные, полученные в ходе проведения эксперимента 4, в таблицу и запишите вывод:

Параметр	0°	$(0^\circ; 180^\circ)$	180°	$(180^\circ; 360^\circ)$	360°
Величина угла					

Вывод: _____

На этапе формирования нового опыта можно попросить проверить справедливость вывода для более широкого спектра значений параметра с продолжением записи в таблицу.

Продemonстрируем теперь реализацию методической схемы, представленной таблицей 1, в **глобальном смысле**.

1. Уровень овладения эмпирическими методами проверки утверждений

Целью данного этапа является формирование умений подтверждать истинность геометрических положений с помощью компьютерного эксперимента: планировать, проводить, обрабатывать и анализировать данные, формулировать адекватные выводы.

В соответствии с этой целью работа на данном этапе должна быть направлена на интеграцию с социокультурными образцами следующих компонентов субъектного опыта:

1) Опыт использования для проверки утверждений *стихийных экспериментов и наблюдений*, который определен врожденной способностью ребенка к исследовательскому поведению. Этот факт отмечает в своей работе А.Н. Поддьяков [86]. Ссылаясь на исследования Р. Шовен [144], Р. Хайнд [125], он говорит: «Программы исследовательского поведения начинают развертываться практически с момента появления живого существа на свет, наряду с программами пищевого и оборонительного поведения» [86, с.3].

2) Опыт проведения *натурных экспериментов* при изучении дисциплин естественнонаучного цикла, накопленный в период с 1 по 6 классы (природоведение, физика, биология и др.).

Интеграция этого опыта с общественным опытом должна осуществляться поэтапно: 1) обучение проведению компьютерного эксперимента на готовых динамических чертежах для проверки истинности геометрических утверждений; 2) обучение планированию компьютерного эксперимента для достижения этой цели; 3) обучение оценке корректности работы оборудования – динамического чертежа, предназначенного для проведения компьютерного эксперимента с целью проверки утверждения.

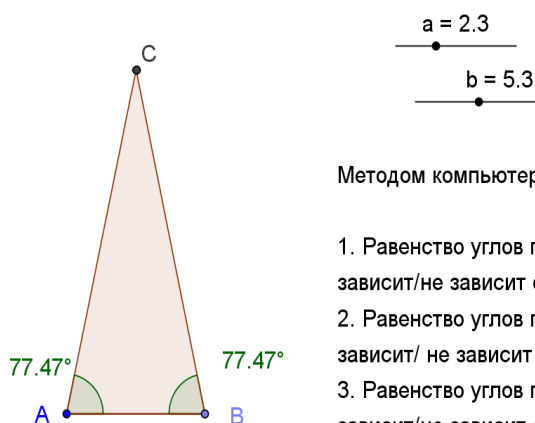
Таким образом, первым типом заданий на доказательство на данном этапе должны стать задания *на проведение компьютерных экспериментов по готовому динамическому чертежу*, с целью исключения сформулированных альтернатив (утверждений, подвергающих сомнению высказанный тезис).

Пример 2. Методика работы с утверждением о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника.

1. Постановка проблемы. В качестве мотивации обнаружения факта равенства углов может быть использована задача на нахождение углов равнобедренного треугольника, если известен только один из них.

2. Выдвижение гипотезы. Учащиеся могут подойти к открытию этого факта в процессе решения данной и ряда сходных с ней задач методом измерений.

3. Проверка. Для проверки справедливости выдвинутой гипотезы может быть использовано задание, представленное на рисунке 36.



Методом компьютерного эксперимента установите, какие из гипотез верны:

1. Равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит/не зависит от выбора длины основания.
2. Равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит/ не зависит от выбора длины боковой стороны;
3. Равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит/не зависит от соотношения длины основания к длине боковой сторон

Рисунок 36.

При постановке подобных заданий необходимо четко формулировать цель эксперимента, описывать или жестко задавать характер возможных изменений параметров, задавать схему фиксации данных, характер требуемых выводов, все эти требования обеспечат окультуривание опыта учащихся, связанный с использованием в процессе познания стихийных проб.

Работа на уроке с данным заданием (в соответствии с **локальной схемой интеграции**) может быть организована следующим образом:

1. Актуализация опыта проведения эксперимента осуществляется за счет предоставления учащимся возможности самостоятельно обнаружить способ применения динамического чертежа для выполнения задания.

2. Раскрытие содержания субъектного опыта начинается в момент обсуждения результатов самостоятельной работы. Здесь могут быть заданы и обсуждены следующие вопросы:

- Какие из представленных утверждений являются верными, а какие нет?
- Как вы предлагаете использовать динамический чертеж для демонстрации справедливости/опровержения каждого из утверждений?

Ответы на эти вопросы позволяют раскрыть опыт учащихся, связанный с описанием хода эксперимента.

3. Окультуривание опыта может осуществляться через упорядочение представленных учащимися описаний хода эксперимента. Для этой цели полезно использовать серии наводящих вопросов, например:

- Какой параметр (ползунок) следует выбрать для проверки первой гипотезы?
- Как изменять значение параметра (ползунка)?
- Что должно быть предметом наблюдения в ходе этих изменений?

А также можно использовать образец записи хода и результатов эксперимента, сходный по форме с образцом, используемым для описания натуральных экспериментов в предметах естественнонаучного цикла:

Лабораторная работа

Название работы: Свойство углов равнобедренного треугольника

Цель работы: Проверить справедливость утверждений

1) Равенство углов при основании равнобедренного треугольника не зависит от выбора длины основания.

2) Равенство углов при основании равнобедренного треугольника не зависит от величины боковой стороны.

3) Равенство углов при основании равнобедренного треугольника не зависит от соотношения длин основания и боковой стороны.

Приборы и материалы: ПК, ИГС GeoGebra, динамический чертеж №5, a – длина основания, b – длина боковой стороны.

Теория:

Определение равнобедренного треугольника, основание, боковая сторона, вершина

равнобедренного треугольника, угол при вершине, углы при основании.

Ход работы для проверки утверждения 1

1. Пользуясь **инструментом перемещать**, просматриваем все допустимые значения параметра a в направлении от меньшего к большему.
2. Следим за тем, изменяется ли соотношение величин углов при основании.
3. По результатам эксперимента заполняем таблицу:

Длина основания (a)	0	(0; 5)	5
Соотношение углов $\angle A$ и $\angle B$			

Надо вставить значок « $=$ », если углы равны, и « $\neq$ » - если углы не равны.

Вывод:

В выводе необходимо ответить на вопросы:

- в чём цель вашей работы;
- какие результаты вы ожидали получить;
- совпали ли результаты вашей работы с ожидаемыми.

Ход работы для проверки утверждения 2

1. Пользуясь **инструментом перемещать**, просматриваем все допустимые значения параметра b в направлении от меньшего к большему.
2. Следим за тем, изменяется ли соотношение величин углов при основании.
3. По результатам эксперимента заполняем таблицу:

Длина боковой стороны (b)	0	(0; $+\infty$)
Соотношение углов $\angle A$ и $\angle B$		

Надо вставить значок « $=$ », если углы равны, и « $\neq$ » - если углы не равны.

Вывод:

В выводе необходимо ответить на вопросы:

- в чём цель вашей работы;
- какие результаты вы ожидали получить;
- совпали ли результаты вашей работы с ожидаемыми.

Ход работы для проверки утверждения 3

1. Зададим параметры как числа, принимающие случайные значения.
2. Анимлируем оба ползунка
3. Следим за тем, изменяется ли соотношение величин углов в основании при различных сочетаниях значений ползунков.

Запишите результаты наблюдения в произвольной форме: _____

Вывод:

В выводе необходимо ответить на вопросы:

- чѐм цель вашей работы;
- какие результаты вы ожидали получить;
- совпали ли результаты вашей работы с ожидаемыми.

После приобретения учащимися умений, связанных с проведением экспериментов и получением выводов, адекватных цели исследования и характеру полученных данных, можно переходить к *обучению планированию эксперимента*. Это совершенно новая для учащихся область. В ее освоении учащиеся могут лишь сделать предметом рефлексивного анализа опыт работы учителя математики по подготовке инструкций на проведение компьютерного эксперимента, либо аналогичный опыт учителей естественно-научных дисциплин (подготовки лабораторных работ по физике, биологии и т.п.).

Для включения учащихся в деятельность заимствования опыта работы учителей на этом этапе могут быть использованы творческие задания:

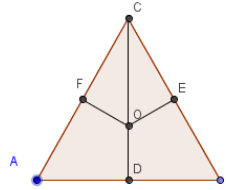
Пример 3. Подготовьте динамический чертеж и инструкции по его использованию для проверки методом компьютерного эксперимента утверждения «Сумма длин перпендикуляров, проведенных из произвольной точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, равна его высоте».

Методика работы с этим заданием должна быть направлена на формирование представлений учащихся о необходимости установления соответствия между: способом построения динамического чертежа, содержанием проверяемых альтернативных утверждений, которые указаны в цели эксперимента, планом экспериментальных действий.

1. Для актуализации и раскрытия содержания опыта учащихся в коллективной работе, связанного с наблюдением за планированием эксперимента в подобных ситуациях, может быть организована дидактическая игра «Собери пазл». Участники игры (группы учащихся 2-3 человека) собирают программу эксперимента из отдельных блоков: описание способа построения динамического чертежа (протоколом, инструкцией, проигрыванием схемы построения); описание цели эксперимента; описание хода эксперимента. Для проведения такой игры в рамках предложенного задания для учащихся могут быть заготовлены карточки-блоки.

В представленной ниже таблице 11 предлагаются варианты карточек из трех блоков: 1) цель эксперимента (утверждение, которое надо подтвердить/опровергнуть с помощью компьютерного эксперимента); 2) алгоритм построения; 3) способ фиксации экспериментальных данных. Учащимся необходимо составить программу компьютерного эксперимента, представляющую набор карточек по одной из каждого блока.

Таблица 11.

	1 группа	2 группа	3 группа	4 группа	5 группа												
Цель	1) сумма длин перпендикуляров, зависит от выбора местоположения точки внутри равностороннего треугольника;	2) Установить, существует ли такая длина стороны равностороннего треугольника, при которой сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника.	3) существуют неравносторонние треугольники, обладающие тем же свойством;	4) сумма длин перпендикуляров остается постоянной и для точек, лежащих на сторонах треугольника;	5) сумма длин перпендикуляров остается постоянной и при выходе точки за пределы треугольника.												
Алгоритм построения треугольника.	№1 Построения равностороннего треугольника и точки, из которой проводятся перпендикуляры к его сторонам (позволит проверить гипотезы): 1. Задайте с помощью ползунка параметр – длина стороны равностороннего треугольника. 2. Постройте с помощью инструмента отрезок заданной длины отрезок АВ. 3. Постройте с помощью инструмента <i>правильный многоугольник</i> треугольник со стороной АВ. 4. Постройте с помощью инструмента <i>точка на объекте</i> точку внутри треугольника ABC.		№2 Построения треугольника и точки, из которой проводятся перпендикуляры к его сторонам: 1. Задать с помощью <i>ползунков</i> три параметра – длины сторон треугольника. 2. Построить отрезок АВ с помощью инструмента <i>отрезок заданной длины</i> . 3. Построить с помощью инструмента <i>окружность по центру и радиусу</i> две окружности O(A; b) и O (B; c). 4. С помощью инструмента <i>пересечение двух объектов</i> найти точку С пересечения построенных окружностей. 5. Постройте с помощью инструмента <i>многоугольник</i> треугольник ABC. 7. С помощью инструмента точка задайте произвольно точку D.														
Характер представления проверяемого факта:	1) сбор в таблицу экспериментальных данных об изменении длин перпендикуляров, высоты треугольника с последующим вычислением суммы и сравнением. <table><tr><td>Длина стороны равностороннего треугольника - <i>a</i></td><td>$0 < a < 10$</td><td>$a = 10$</td><td>$a > 10$</td></tr><tr><td>Точка внутри треугольника</td><td>сумма длин перпендикуляров равна высоте треугольника</td><td>сумма длин перпендикуляров равна высоте треугольника</td><td>сумма длин перпендикуляров равна высоте треугольника</td></tr><tr><td>Точка вне треугольника</td><td>сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника</td><td>сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника</td><td>сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника</td></tr></table>			Длина стороны равностороннего треугольника - <i>a</i>	$0 < a < 10$	$a = 10$	$a > 10$	Точка внутри треугольника	сумма длин перпендикуляров равна высоте треугольника	сумма длин перпендикуляров равна высоте треугольника	сумма длин перпендикуляров равна высоте треугольника	Точка вне треугольника	сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника	сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника	сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника	2) вывод на экран динамического текста, позволяющего следить за сохранением или нарушением проверяемого равенства $OF + OE + OD = 1.01 + 1.01 + 1.01 = 3.03$ $CD = 3.03$ 	
Длина стороны равностороннего треугольника - <i>a</i>	$0 < a < 10$	$a = 10$	$a > 10$														
Точка внутри треугольника	сумма длин перпендикуляров равна высоте треугольника	сумма длин перпендикуляров равна высоте треугольника	сумма длин перпендикуляров равна высоте треугольника														
Точка вне треугольника	сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника	сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника	сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника														

В результате могут получиться следующие изображения:

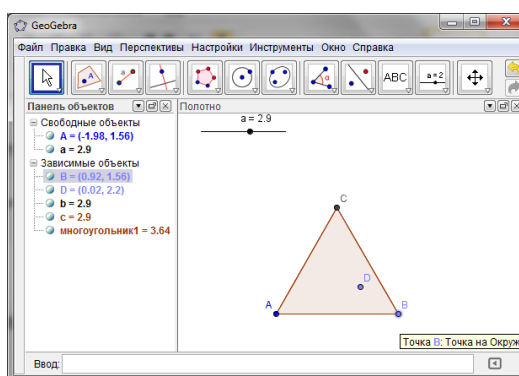


Рисунок 37.

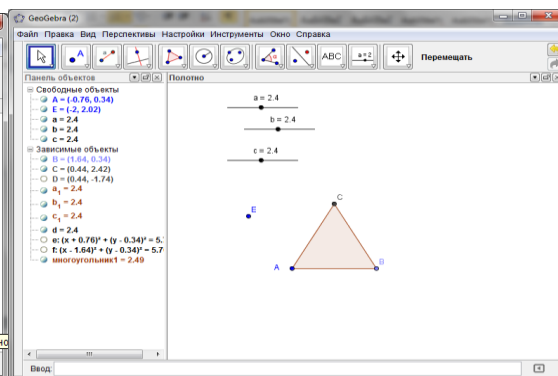


Рисунок 37'.

2. «Окультуривание» опыта учащихся может быть организовано как процесс взаимопроверки программ – обмен составленными программами и проведение компьютерных экспериментов по ним.

Эти пробы выявят недостатки программ, создадут основу для введения требований к постановке компьютерных экспериментов:

- Параметр или параметры при построении чертежа следует выбирать в соответствии с целью компьютерного эксперимента (это те величины, от изменения которых требуется установить, зависит или не зависит проверяемое свойство).

- Алгоритм построения динамической модели объекта исследования должен быть составлен так, чтобы все введенные параметры были включены в число входных объектов.

- Алгоритм должен быть составлен так, чтобы при любых изменениях параметров сохранялись все свойства объекта исследования, заданные условием задачи или теоремы.

- Таблица для записи результатов эксперимента должна быть составлена так, чтобы в неё входили все параметры, задающие объект исследования (в качестве имен-строк), а также проверяемое свойство (в качестве имени последней строки).

- Для определения количества столбцов таблицы необходимо провести разведочный эксперимент, в котором выявятся контрольные значения параметров (или сочетания параметров).

- Все пограничные (контрольные) значения параметра являются именами отдельных столбцов в таблице, кроме того, именами столбцов таблицы являются интервалы, на которые контрольные значения разбивают область определения параметра.

- Выводы компьютерного эксперимента должны быть сформулированы таким образом, чтобы подтвердить или не подтвердить гипотезу. При этом гипотеза должна быть сформулирована со ссылкой на данные, приведенные в таблице результатов эксперимента.

3. Формирование нового субъектного опыта в рамках данного задания может осуществляться в ходе планирования учащимися экспериментов для снятия остальных альтернатив доказываемого утверждения.

С целью включения учащихся в деятельность формирования собственного опыта планирования компьютерных экспериментов для целей проверки геометрических утверждений им может быть предложена серия постепенно усложняющихся *задач на экспериментальную проверку утверждений*.

Самым простым типом задач данного вида являются задачи на создание таблицы записи результатов компьютерных экспериментов, если условием задачи уже определены цель компьютерного эксперимента и способ построения динамического чертежа (или он дан в готовом виде).

Следующими по уровню сложности являются задачи, в которых определена лишь цель проведения компьютерного эксперимента, а учащимся требуется самостоятельно выполнить построение динамического чертежа и спланировать компьютерный эксперимент.

Самым сложным типом задач будут те, в которых цель эксперимента не определена (как утверждения о проверке зависимости/не зависимости исследуемого свойства о значении каких либо параметров) и учащимся требуется самим её поставить, затем спланировать и провести компьютерный эксперимент.

Проиллюстрируем особенности формулировок всех указанных выше типов задач на конкретном примере: «Сумма длин перпендикуляров, проведенных из произвольной точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, равна его высоте».

1) Сформулируйте как можно больше утверждений, альтернативных данному: «Сумма длин перпендикуляров, проведенных из произвольной точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, равна его высоте». Спланируйте и проведите компьютерные эксперименты для их проверки.

2) Постройте динамический чертеж, придумайте форму записи результатов для проведения компьютерного эксперимента, позволяющего проверить, зависит ли равенство суммы перпендикуляров длине высоты равностороннего треугольника от местоположения точки, из которой проведены эти перпендикуляры.

3) Придумайте форму записи результатов для проведения компьютерного эксперимента, позволяющего проверить, существует ли такая длина стороны равностороннего треугольника, при которой сумма длин перпендикуляров не равна высоте треугольника, пользуясь готовым динамическим чертежом.

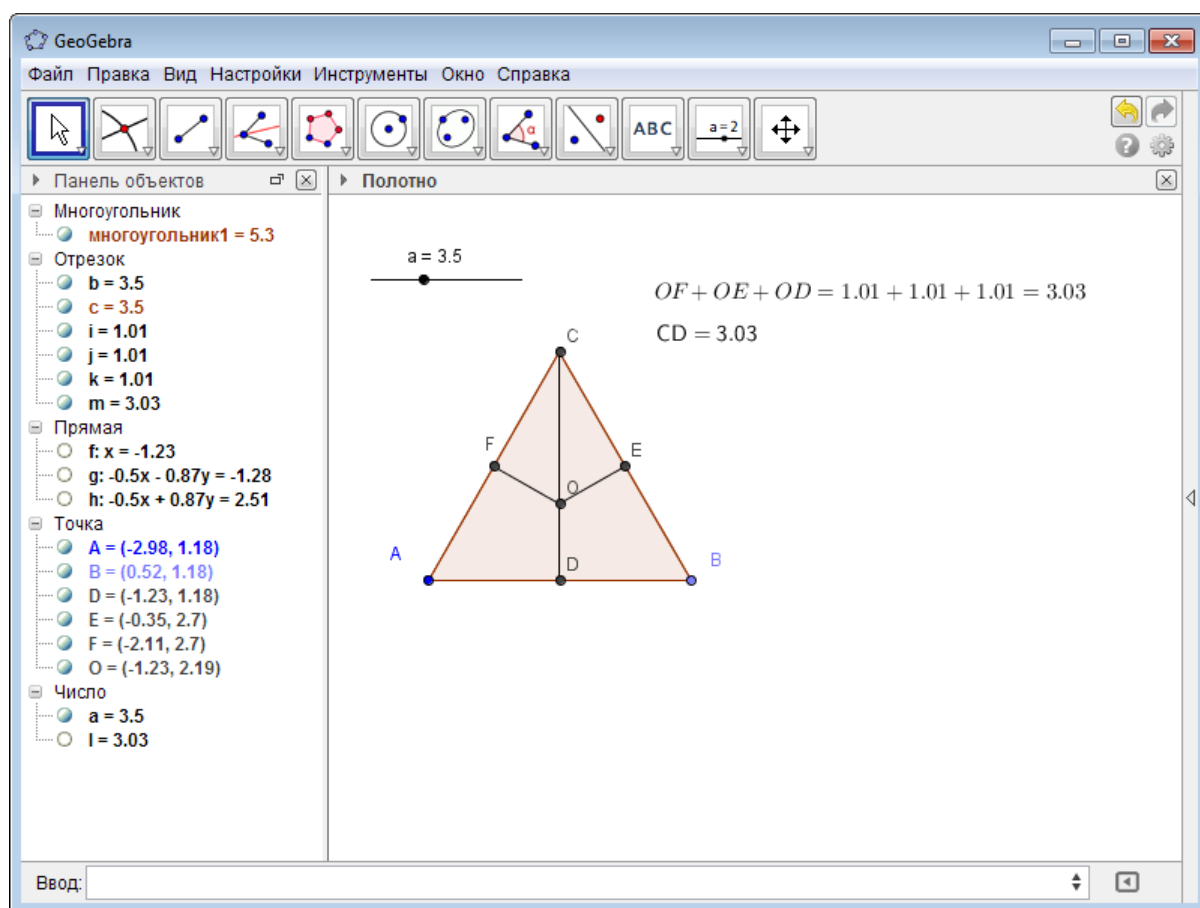


Рисунок 38.

2. *Уровень овладения логическими методами контроля корректности технических средств, применяемых в ходе компьютерного эксперимента.*

Этот уровень характеризуется переносом акцента с эмпирических методов на теоретические в проверке утверждений. Для этого деятельность по проведению и планированию компьютерных экспериментов дополняется деятельностью по обоснованию адекватности динамической модели исходным данным, т.е. устойчивостью свойств виртуальной модели, указанных в условии задачи (или теоремы) по отношению к изменениям параметров модели в ходе эксперимента [10].

В связи с этой целью в содержание обучения доказательству на данном этапе должен быть включен метод априорного тестирования алгоритмов. Таким методом является *статический метод тестирования*, т.е. метод, не предполагающий запуск программы.

«Статические методы используются при проведении инспекций и рассмотрении спецификаций компонентов без их выполнения. Техника

статического анализа заключается в методическом просмотре (или обзоре) и анализе структуры программ, а также в доказательстве их правильности » [81].

В качестве спецификации динамического чертежа может быть использовано описание шагов построения инструментами GeoGebra или протокол построения (рис. 39,б). В теории тестирования программного обеспечения предлагается начинать анализ спецификаций с построения графа программы (рис.39,а).

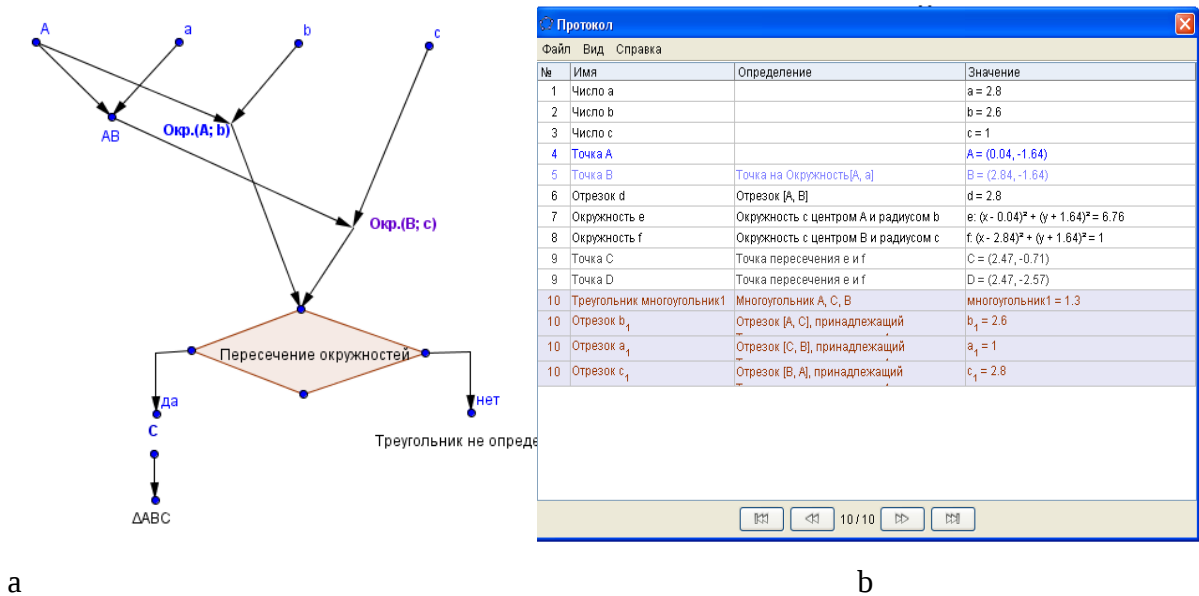


Рисунок 39.

Самым простым для обоснования является «...построение каждого пути посредством постепенного его удлинения за счет добавления дуг, пока не будет достигнута выходная вершина управляющего графа программы» [79, с.69].

Такой способ позволяет осуществлять обоснование результативности каждого шага, а также проводить поэлементное обоснование адекватности конструктивной модели с соблюдением тех же шагов, которые характерны для доказательства дедуктивным методом (см. таблицу 12).

Таблица 12.

Входной объект (Посылка)	Выходной объект (Заключение)	Обоснование
Точка <i>A</i> , параметр <i>a</i> .	Отрезок <i>AB</i> длины <i>a</i>	Основное свойство (аксиома) откладывания

		отрезков
Точка A , параметр b .	Окружность с центром в точке A и радиусом b	Определение окружности
Точка B , параметр c .	Окружность с центром в точке B и радиусом c .	Определение окружности
Окружность с центром в точке A и радиусом b . Окружность с центром в точке B и радиусом c .	Точка C , если $AB=b+c$; Точки C и D , если $AB<b+c$; Точек пересечения нет, если $AB>b+c$.	Теорема-критерий о взаимном расположении двух окружностей.
Отрезок AB , точка C .	$\triangle ABC$ (включая треугольник с нулевой площадью)	Определение треугольника.

Представленный пример показывает, что применение дедуктивных рассуждений на данном этапе ограничено обоснованием правильности выбора и результативности конструктивных действий по созданию виртуальной модели объекта исследования ссылкой на определения геометрических понятий, аксиомы, теоремы-признаки или теоремы-критерии.

К моменту, когда алгоритм создания динамических чертежей становится объектом теоретического анализа и логически обоснованного построения, у учащихся накоплен уже достаточно богатый опыт конструирования в DGS. Следовательно, в субъектный опыт учащихся включены представления о входных и выходных конструктивных объектах, характеристических наборах входных объектов, алгоритме, свойстве результативности алгоритма и шагов построения, перечне геометрических утверждений, которые выступали в качестве теоретических основ выбора алгоритма, или его модулей, или отдельных шагов.

Данный факт доказывает, что основу методической схемы на этом этапе обучения, также, как и на первом, должна составлять схема интеграции субъектного опыта с общественным. Кроме нее теоретическую основу, определяющую логику движения содержания образования внутри данного этапа должна составлять *идея внутрисистемной дифференциации*, высказанная Л.В. Занковым и использованная для формирования методологических знаний в процессе обучения математике М.В. Шабановой [130]. Суть этой идеи состоит в переходе от обоснования результативности

алгоритма в целом к обоснованию результативности его модулей (целостных частей алгоритма), а от них к обоснованию результативности его шагов. Для реализации этих подэтапов могут быть использованы задачи:

- на разработку алгоритма построения динамического чертежа по заданной теореме (аксиоме или определению) (пример 9);
- задачи - на формулировку утверждения, на использовании которого основан алгоритм построения динамического чертежа (пример 10);
- задачи на обоснование корректности работы основных блоков алгоритма построения динамического чертежа при любых значениях входных параметров и мест взаимного расположения входных объектов (пример 11);
- задачи на выделение (без запуска программы) области допустимых значений входных параметров в каждом (заданном) блоке алгоритма построения (пример 12);
- задачи на пошаговое обоснование корректности работы алгоритма построения (пример 13).

Проиллюстрируем методику работы с задачами этих видов на конкретных примерах.

Пример 9. Опишите алгоритмы построения равнобедренного треугольника, основанные на использовании: а) его определения; б) теоремы о равенстве углов при его основании; в) теоремы о равенстве медианы и высоты, проведенных к его основанию; г) теоремы о равенстве медианы и биссектрисы, проведенных к его основанию.

1. Актуализация опыта состоит в предоставлении учащимся возможности создания своего алгоритма построения равнобедренного треугольника с опорой на одну из предложенных теорем или определение.

2. Для раскрытия содержания опыта построения динамического чертежа необходимо организовать работу по презентации учащимися своих динамических моделей равнобедренного треугольника. В перечень требований к презентации включить не только требование демонстрации

динамических возможностей чертежа, но и требование к описанию алгоритма его построения (в режиме проигрывания построений или представления протокола) с обоснованием корректности модели.

Речь учащегося при этом может быть такой: «Построим равнобедренный треугольник, пользуясь теоремой о равенстве медианы и высоты, проведенных к его основанию. Сначала, с помощью инструмента *отрезок*, строим основание этого треугольника АВ. Далее, с помощью инструмента *середина*, находим основание медианы М. Чтобы треугольник был равнобедренным, медиана должна быть равна высоте, поэтому из М восстанавливаем перпендикуляр (инструмент *перпендикулярная прямая*). На перпендикуляре произвольно выбираем точку С (инструмент *точка на объекте*). Соединяем точки А, В и С с помощью инструмента *многоугольник*, получили равнобедренный треугольник ABC».

3. «Окультуривание» опыта учащихся, связанного с выбором теоретического основания алгоритма может осуществляться за счет введения требования записывать обоснование в виде таблицы:

Таблица 13.

Входные объекты (посылка)	Выходной объект (заключение)	Обоснование
А, а, h	Треугольник ABC	Теорема-признак равнобедренного треугольника по равенству медианы и высоты.

4. Этап формирования нового опыта может быть организован как деятельность по созданию нового инструмента по этому описанию.

Шаг 1. Пройдите по ссылке «*Инструменты*»/ «*Создать инструмент*». Откроется диалоговое окно.

Шаг 2. Выберите выходной объект – *Треугольник многоугольник 1* из выпадающего списка в диалоговом окне или указанием на нее левой кнопкой мыши в графическом окне. Нажмите «*Следующий*».

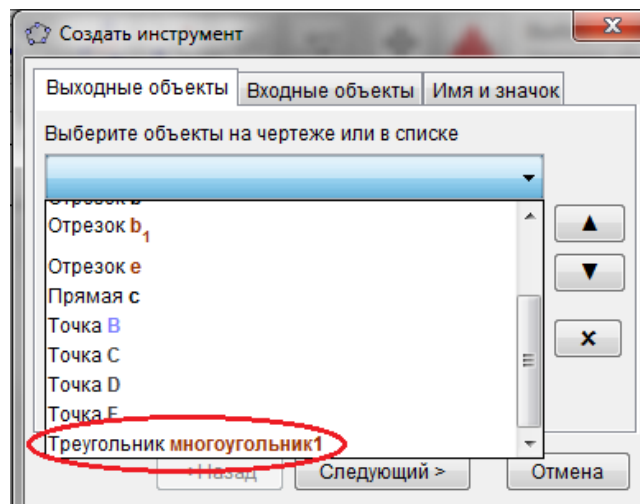


Рисунок 40 а.

Шаг 3. Выберите входные объекты: точка A , число a и число h (аналогичным способом). Нажмите «Следующий».

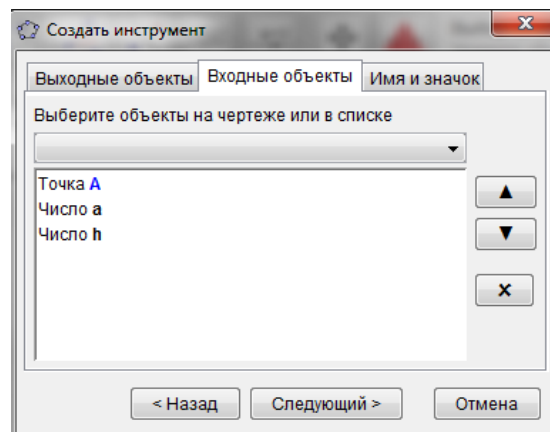


Рисунок 40 в.

Шаг 4. Ввести название инструмента «*Равнобедренный треугольник*». Указание по его использованию «Указать точку, длину основания и длину высоты треугольника». Зайдите на вкладку «Значок». Выберите файл с рисунком . Нажмите «Открыть», затем «Завершить», «Ok».

Задание 4. Испытайте новый инструмент.

Отметьте произвольную точку A с помощью инструмента «Точка». В графической поле появится всплывающее окно: «Число a », потом окно: «Число h ». Выберите в качестве их заданные с помощью ползунков параметры a и h .

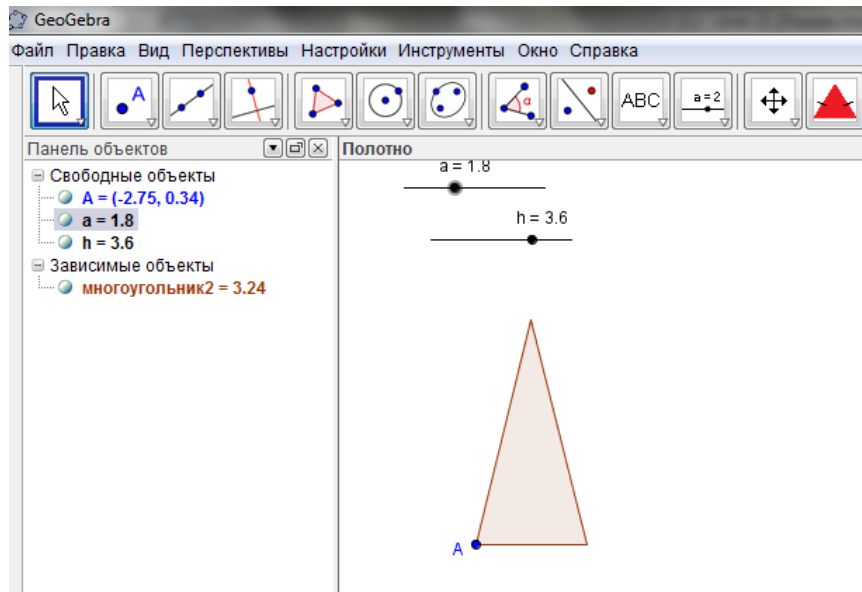


Рисунок 40 с.

Пример 10. Сформулируйте утверждение (теорему), на использовании которого основано построение чертежа, представленного протоколом (рис.41):

Протокол			
№	Имя	Определение	Алгебра
1	Число a		$a = 3.9$
2	Число b		$b = 3.5$
3	Точка A		$A = (-2.5, 1.32)$
4	Точка B	Точка на Окружность[A, a]	$B = (1.4, 1.32)$
5	Отрезок c	Отрезок [A, B]	$c = 3.9$
6	Окружность d	Окружность с центром A и радиусом b	$d: (x + 2.5)^2 + (y - 1.32)^2 = 12.25$
7	Окружность e	Окружность с центром B и радиусом b	$e: (x - 1.4)^2 + (y - 1.32)^2 = 12.25$
8	Точка C	Точка пересечения e и d	$C = (-0.55, -1.59)$
8	Точка D	Точка пересечения e и d	$D = (-0.55, 4.23)$
9	Треугольник многоугольник1	Многоугольник A, D, B	многоугольник1 = 5.67
9	Отрезок b_1	Отрезок [A, D], принадлежащий	$b_1 = 3.5$
9	Отрезок a_1	Отрезок [D, B], принадлежащий	$a_1 = 3.5$
9	Отрезок d_1	Отрезок [B, A], принадлежащий	$d_1 = 3.9$

Рисунок 41.

Актуализация опыта состоит в предоставлении учащимся возможности воспроизведения построений по протоколу.

1. Раскрытие содержания опыта требует включения учащихся в деятельность вербализации представлений о выходном объекте и характеристическом наборе входных объектов, которые составляют

содержание заключения и условия теоремы или определяемой и определяющей частей определения.

2. Окультуривание опыта учащихся, связанного с обоснованным выбором того или иного утверждения по заданному алгоритму, может осуществляться за счет введения понятия «характеристический набор элементов» [90], выявления представлений учащихся о специфике функций теорем-признаков и особенностях их структуры, а также установления связи между ними, теоремами-критериями и определениями [9]. В качестве методического средства, облегчающего учащимся формулировку утверждения на основе выделенного набора входных объектов и выходного объекта, можно использовать базовую схему дедуктивного умозаключения: «Если __, то __.», в посылке которого находится характеристический набор входных объектов динамического чертежа, а в заключении – выходной объект. Она позволяет сформировать утверждение, которое в результате сопоставления с известными утверждениями (на основе знаний о связях видов предложений геометрии) позволит прийти к правильному выводу о теоретических основах построения динамического чертежа (в нашем случае к переформулировке теоремы-признака в определении понятия равнобедренный треугольник).

3. Этап формирования нового опыта может быть организован как деятельность по распознаванию утверждений без воспроизведения протокола построения или алгоритма (путем его анализа и выделения элементов или модулей – признаков теоретического основания построения). В данном примере такими модулями – признаками являются: для выходного объекта - четыре записи, относимые к шагу 9, для характеристического набора входных элементов - независимые объекты, с которых начинается построение (шаги 1-3).

Пример 11. Для компьютерного решения задачи «В равнобедренный треугольник вписана окружность. Через точку пересечения окружности с биссектрисой угла при вершине треугольника проведена прямая,

параллельно основанию. Установите, при каких условиях отрезок этой прямой, заключенный между сторонами треугольника, является средней линией треугольника» был подготовлен динамический чертеж по представленному алгоритму. Докажите, что чертеж удовлетворяет условию задачи.

Алгоритм построения динамического чертежа:

1. Задать с помощью ползунков два параметра – длина основания и угол при основании треугольника.
2. Построить отрезок АВ с помощью инструмента *отрезок заданной длины*.
3. Построить с помощью инструмента *угол заданной величины* $\angle A$ и $\angle B$.
4. С помощью инструмента *пересечение двух объектов* найти точку С пересечения сторон углов $\angle A$ и $\angle B$.
5. Построить треугольник ABC по трем сторонам с помощью инструмента *многоугольник*.
6. Построить биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle C$ треугольника с помощью инструмента *биссектриса угла*.
7. С помощью инструмента *пересечение двух объектов* найти точку О пересечения биссектрис углов $\angle A$ и $\angle C$.
8. С помощью инструмента *пересечение двух объектов* найти точку Н пересечения биссектрисы угла $\angle C$ и отрезка АВ.
9. Построить вписанную в треугольник окружность по центру О и точке Н с помощью инструмента *окружность по центру и точке*.
10. С помощью инструмента *пересечение двух объектов* найти точку М пересечения биссектрисы угла $\angle C$ и окружности.
11. Через М с помощью инструмента *параллельная прямая* провести прямую $a \parallel AB$.

12. С помощью инструмента *пересечение двух объектов* найти точки K и L пересечения прямой AI со сторонами треугольника ABC и BC .

13. С помощью инструмента *отрезок по двум точкам* строим отрезок KL .

1. Актуализация опыта состоит в преобразовании алгоритма в таблицу с выделением характеристического набора входных объектов и выходного (см. табл. 14). Выполнение данного задания подведет учащихся к проблеме невозможности указания одного утверждения, на использовании которого основано построение. Индивидуальные подходы учащихся к разрешению этого противоречия реализуются на следующем этапе.

2. Раскрытие содержания индивидуальных подходов к разрешению противоречий, основанных на субъектном опыте учащихся, может быть организовано как обсуждение результатов выполнения и возникших у учащихся трудностей в предыдущем задании. В результате обсуждения может быть установлено многообразие способов описания выходного объекта (как многофигурной геометрической конфигурации, как последовательности фигур), различные способы теоретического обоснования правильности построения (ссылка на одну ключевую теорему, указание перечня теорем).

3. С целью окультуривания опыта учащихся можно дать им рекомендации разделять алгоритм на отдельные самостоятельные части - модули (по видам выходных объектов), каждый из которых заканчивается построением лишь одного выходного объекта (в нашем примере построение равнобедренного треугольника, вписанной окружности, отрезка касательной). Такое разбиение позволит сводить обоснование к использованию лишь одной теоремы / определения (см. табл. 14).

Таблица 14.

Входной объект (Посылка)	Выходной объект (Заключение)	Обоснование
Точка A , параметр a , угол.	Равнобедренный треугольник.	Теорема-признак равнобедренного треугольника.

Треугольник	Вписанная окружность	Теорема о существовании и единственности окружности, вписанной в треугольник
Окружность, основание треугольника, точка пересечения окружности с биссектрисой, опущенной на основание	Отрезок касательной	Теорема - признак касательной

4. На этапе формирования нового опыта учащимся может быть предложено придумать свой алгоритм построения динамического чертежа к этой же задаче и обосновать его правильность.

Пример 12. Для решения задачи «Найдите периметр трапеции, если около неё можно описать окружность радиуса R , и можно вписать окружность радиуса r , а расстояние между центрами этих окружностей равно a » построен динамический чертеж, для параметров которого определены следующие значения $0 < R < 20, 0 < a < R - r, 0 < r < R$. Докажите, что при заданных значениях параметров динамический чертеж позволяет исследовать все трапеции, удовлетворяющие условию задачи.

1. Актуализация опыта состоит в предоставлении учащимся возможности составления алгоритма построения динамического чертежа с заданными параметрами, а затем его модульного обоснования.

2. Раскрытие содержания опыта обоснования возможных значений параметров можно организовать путем включения учащихся в деятельность выделения тех утверждений, включенных в обоснование, которыми можно объяснить введенные ограничения на значения параметра.

3. «Окультуривание» опыта учащихся, связанного с обоснованием выбора параметров, состоит с введения рекомендации включения в перечень обоснований утверждений, определяющих область допустимых значений параметров (см.табл.15).

Таблица 15.

Входной объект (Посылка)	Выходной объект (Заключение)	Обоснование выбора области допустимых значений параметра
Точка O , параметр R ,	Окружность $(O; R)$,	По определению окружности

т.ч. $R > 0$		По аксиоме измерения отрезка (длина отрезка выражается положительным числом).
О, прямая а	Диаметр FE	По определению диаметра
Диаметр FE, О, параметр а, т.ч. $0 < a < R - r$	Окружность (О; а)	По аксиоме измерения отрезка. По свойству прямоугольного треугольника (гипотенуза R больше катета $r + a$).
Окружность (О; а), диаметр FE	O_1 и O_2	По свойству взаимного расположения прямой и окружности
Точка O_1 и параметр r, т.ч. $0 < r < R$	Окружность (O_1 ; r)	По аксиоме измерения отрезка. По аксиоме сравнения отрезков.
Окружность (O_1 ; r), диаметр FE	M, N	По свойству взаимного расположения прямой и окружности
M, диаметр FE	Прямая $ML \parallel FE$	По аксиоме параллельности
N, диаметр FE	Прямая $NL \parallel FE$	По аксиоме параллельности
Прямая ML, окружность (О; R)	Точки А и В	По свойству взаимного расположения прямой и окружности
Прямая NL, окружность (О; R)	Точки С и Д	
Точки А, В, С, Д	Трапеция ABCD	По определению трапеции

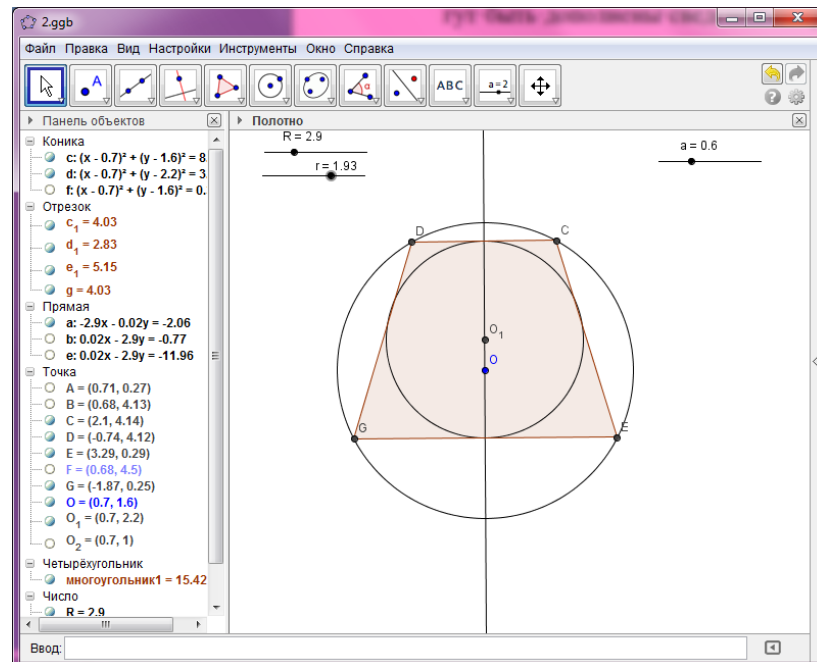


Рисунок 42. Результат выполнения алгоритма построения, представленного в табл.10, и подбора значений.

4. На этапе формирования нового опыта учащимся может быть предложено придумать свой алгоритм построения динамического чертежа к

этой же задаче и установить, зависит ли область допустимых значений параметров от алгоритма построения.

Пример 13: Восстановите по представленной таблице с помощью графов схему построения динамического чертежа к задаче из примера 11. Следует ли из представленных в таблице обоснований выполнимость и правильность каждого шага построения (см. табл.16).

Таблица 16.

Входные (посылка) объекты	Выходной (заключение) объект	Обоснование
Отрезок АВ, параметры a , b и c	Окружность с центром А и радиусом b , окружность с центром В и радиусом c .	Определение отрезка, определение окружности
Окружность (А; b), окружность (В; c).	Точка С	Взаимное расположение окружностей
Отрезок АВ, точка С	$\triangle ABC$	Определение треугольника

1. Актуализация опыта состоит в предоставлении учащимся возможности восстановить с помощью графов схему построения динамического чертежа. В результате этого ученики увидят, что в таблице пропущены действия.

2. Раскрытие содержания опыта обоснования возможных значений параметров можно организовать с помощью обсуждения учащимися вопроса о том, является ли следствием представленных в таблице обоснований выполнимость и правильность шагов построений.

3. Окультуривание опыта учащихся, связанного с обоснованием выбора параметров в рекомендациях пошагового выполнения алгоритма и представления образца такого обоснования.

4. На этапе формирования нового опыта учащимся может быть предложено изменить алгоритм построения и провести пошаговое его обоснование.

Для перехода к третьему этапу обучения доказательству желательно столкновение учащихся с ситуацией мотивирующий отказ от проведения контрольного компьютерного эксперимента. Такой ситуацией является

случай, когда обоснование правильности алгоритма построения динамического чертежа раскрывает и истинность доказываемого утверждения. К числу таких задач относятся:

- задачи (теоремы), на конструктивное доказательство существования математического объекта (или класса математических объектов), обладающих заданным набором свойств;

- задачи (теоремы), в которых доказываемое свойство математического объекта (или класса математических объектов) являются прямым следствием алгоритма его построения.

Приведем примеры таких задач и опишем методику работы с ними, подводящую учащихся к пониманию возможности отказа от проведения компьютерного эксперимента.

Пример 14. Проверьте справедливость утверждения «Биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке».

1. Актуализация опыта состоит в предоставлении учащимся возможности самостоятельного выбора метода проверки справедливости утверждения, его планирования и реализации.

2. С целью включения учащихся в деятельность оценки достаточности и избыточности предложенных мер проверки утверждения, задание может быть дополнено игровым требованием: найти не только правильный, но и самый быстрый способ подтверждения его справедливости.

По характеру удовлетворения этому требованию предложения учащихся могут различаться по количеству процедур, входящих в алгоритм построения динамического чертежа, по характеру реализуемости алгоритма (реальное или мысленное его исполнение), по характеру оснований, использованных для получения вывода об истинности утверждения (данные эксперимента, обоснование эффективности алгоритма построения точки пересечения биссектрис для семейства треугольников, заданных набором параметров).

3. «Окультуривание» опыта учащихся может быть связано с введением термина «конструктивное доказательство» и раскрытием его содержания через демонстрацию образца применения (см. табл. 17).

Таблица 17.

Входные объекты или посылка	Выходные объекты или заключение	Обоснование
Треугольник ABC , заданный величинами двух его сторон и угла между ними.	Можно построить биссектрисы углов A , B и C .	Определение биссектрисы треугольника
Биссектрисы углов A и B	Можно отметить точку O - точку пересечения биссектрис A и B	Теорема о сумме углов треугольника. Признак параллельности прямых по сумме внутренних односторонних углов.
Биссектрисы углов A , B и C и точка O	O принадлежит биссектрисе угла C	По свойству биссектрисы угла

Вывод: Так как для обоснования ни на одном шаге не использовали свойства самого треугольника, то можно утверждать без проведения эксперимента, что биссектрисы всех трех углов любого треугольника пересекаются в одной точке.

В зависимости от уровня подготовленности учащихся эти сведения могут быть дополнены сведениями о сущности данного метода [23, с.40], а также о конструктивном подходе в математике (о конструктивном периоде в истории развития математики [16]) и о конструктивной математике [56].

4. Этап формирования нового опыта может быть организован как поиск среди ранее доказанных методом компьютерного эксперимента утверждений тех, для которых выводы об истинности могут быть сделаны без опоры на экспериментальные данные (следуют из обоснования алгоритма). Наиболее близкими по содержанию к данной задаче являются утверждения о точках пересечения высот и медиан (сформулированные еще в 7 классе в результате компьютерной проверки).

Задачи второго типа, в которых доказываемое свойство математического объекта (или класса математических объектов) является прямым следствием алгоритма его построения, следует искать среди задач

на установление позиционных свойств объектов в геометрических конфигурациях. Таких задач довольно много в школьных учебниках геометрии, для их использования достаточно лишь включить в формулировку указание на роль GeoGebra в их решении. Рассмотрим одну из них.

Пример 15. Напишите алгоритм построения в GeoGebra ромба, около которого можно описать окружность. Какими свойствами, кроме общих свойств ромба, он дополнительно обладает?

1. Актуализация опыта состоит в разработке и пошаговом обосновании учащимися справедливости алгоритма построения ромба и описанной вокруг него окружности (путем заполнения таблицы).

Приведем несколько возможных алгоритмов построения:

Алгоритм № 1 (построение ромба по стороне и прилежащему острому углу).

Таблица 18.

Входные объекты или посылка	Выходные объекты или заключение	Обоснование
Точка A, параметр a (a –любое).	Отрезок AB.	По аксиоме задания отрезков
Отрезок AB, параметр α .	Угол $\angle BAV'$.	По аксиоме задания углов.
Точка A, параметр a.	Окружность (A; a).	Определение окружности
Луч AB' , окружность (A; a).	Точка C.	Взаимное расположение луча и окружности
Точка C, параметр a.	Окружность (C; a).	Определение окружности
Точка B, параметр a.	Окружность (B; a).	Определение окружности
Окружность (C; a), окружность (B; a).	Точка D.	Взаимное расположение окружностей
Точки A, B, C, D.	Ромб ABCD.	Определение ромба
Точки A, C, D.	Окружность.	Определение описанной окружности

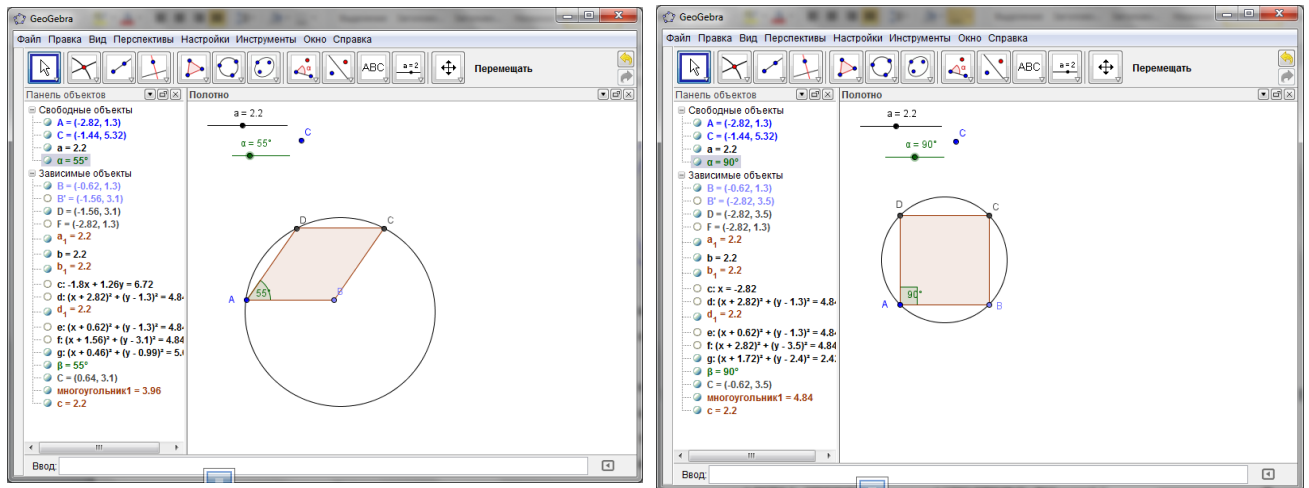


Рисунок 43. Результат реализации алгоритма № 1 и его применения для решения задачи методом компьютерного эксперимента

Алгоритм № 2 (построение ромба по двум диагоналям).

Таблица 19.

Входные объекты или посылка	Выходные объекты или заключение	Обоснование
Точка A, параметр a (a – любое).	Диагональ ромба отрезок AC = a	По аксиоме задания отрезков
Отрезок AB	N – середина отрезка	Определение середины отрезка
Точка N, отрезок AB	Перпендикуляр NK ⊥ AB	Определение перпендикуляра к прямой
Окружность (N;b/2), прямая NK.	Точки C и D.	Взаимное расположение прямой и окружности
Точки A, B, C, D.	Существует ромб ABCD.	Определение ромба
Точки A, C, D.	Существует и единственная окружность	Определение описанной окружности

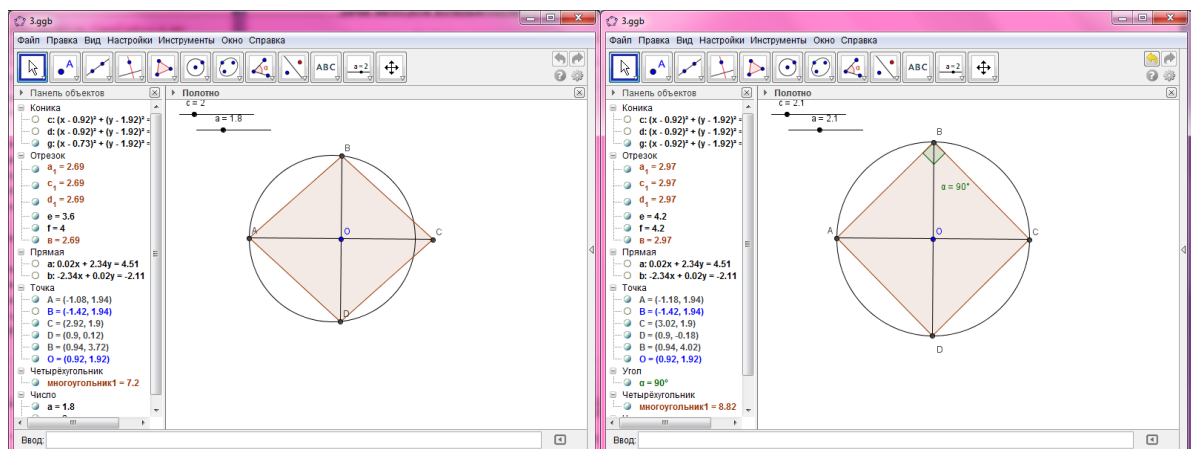


Рисунок 44. Результат реализации алгоритма № 2 и его применения для решения задачи методом компьютерного эксперимента.

2. Раскрытие содержания опыта требует включения учащихся в деятельность выбора алгоритма построения, позволяющего сделать вывод за наиболее короткое время. Таким алгоритмом является алгоритм №2 т.к. для получения вывода не требуется ни его исполнение, ни проведение эксперимента.

3. Окультуривание опыта учащихся состоит в замене обоснования алгоритма построения динамического чертежа дедуктивным обоснованием требуемого в задаче утверждения (см. табл.20).

Таблица 20.

Посылка	Заключение	Обоснование
Задано: Точка А, параметр а (а –любое).	Существует отрезок $AB=a$	По аксиоме задания отрезков
Построен отрезок АВ, задан параметр α . (α – от 0° до 180°).	Существует и единственный угол $\angle BAB' = \alpha$	По аксиоме задания углов.
Задано: Точка А, параметр а (а –любое).	Существует и единственная окружность (А; а).	Определение окружности
Построен луч AB' , окружность (А; а).	Существует точка С - пересечения.	Взаимное расположение луча и окружности
Построена точка С, параметр а. (а –любое).	Существует и единственная окружность (С; а).	Определение окружности
Построена точка В, параметр а. (а –любое).	Существует и единственная окружность (В; а).	Определение окружности
Построены окружность (С; а), окружность (В; а).	Существует точка D – пересечения.	Взаимное расположение окружностей
Точки А, В, С, D.	Существует ромб ABCD.	Определение ромба
Точки А, С, D.	Существует и единственная окружность	Определение описанной окружности

4. Этап формирования нового опыта может быть организован как поиск среди ранее доказанных методом компьютерного эксперимента утверждений, тех, для которых выводы об истинности могут быть сделаны без опоры на экспериментальные данные (следуют из обоснования алгоритма).

Постепенное накопление опыта обращения к конструктивным доказательствам сформирует у учащихся естественную потребность в экономии средств проверки утверждений за счет замены практических процедур интеллектуальными, основанными на дедуктивных рассуждениях. Скорость формирования таких потребностей у учащихся, как показал

проведенный нами формирующий эксперимент, является очень индивидуальной. Исследования В.А. Далингера [60] показывают, что ее становление определяется стилевыми особенностями мышления учащихся - предпочтениями в восприятии и переработке визуальной или вербальной информации. Основной период ее становления приходится на 8 класс, когда выбор между экспериментальными и теоретическими методами обоснования, успешность их применения в значительной степени зависит от учебного содержания (см. параграф 2.3).

Помочь этому процессу - задача третьего этапа обучения доказательству, которая решается нами за счет использования средств DGS в рамках когнитивно-визуального подхода обучения доказательству, предложенному В.А. Далингером.

3. Уровень овладения дедуктивным методом доказательства.

Данный уровень характеризуется формированием умений:

1) *логически объяснять* факт динамической устойчивости свойств конструктивного объекта, т.е. путем дедуктивных рассуждений вскрывать механизмы причинно-следственных связей, изменяемых и изменяющихся под их влиянием свойств его элементов;

2) *логически выводить* утверждение о динамической устойчивости свойств конструктивного объекта из сведений о его заданных свойствах.

Для достижения этих целей с опорой на опыт проверки утверждений методом компьютерного эксперимента и обоснования конструктивным методом необходимо пересмотреть отношение авторов учебных пособий к выбору способов доказательства теорем. На этот факт неоднократно обращали внимание в своих статьях руководители проектов, связанных с разработкой методик обучения геометрии с использованием возможностей различных DGS в России и за рубежом.

Так, например, В.И. Рыжик и В.Н. Дубровский в своих статьях неоднократно обращали внимание на целесообразность рассмотрения вопроса о расширении области использования геометрических

преобразований как основы доказательств (в явном или неявном виде). Так, В.И. Рыжик отмечает, что «Если выстроить школьный курс геометрии в соответствии с прикладной математикой, с ее методологией, если мы с самого начала разрешим ребенку свободно пользоваться соображениями наглядности, симметрии, непрерывности, то преподавание геометрии пойдет в школе гораздо интенсивнее, быстрее и интереснее» [99, с.8]. В.Н. Дубровский считает, что нужно рассмотреть вопрос о построении школьных геометрических доказательств на фалесовских традициях: «...первые математические (геометрические) доказательства, которые дал великий греческий ученый Фалес, основывались, как считают историки, как раз на преобразованиях, и лишь много позже, благодаря Евклиду, основным методом в геометрии стало рассмотрение равных и подобных треугольников» [27, с.25].

К числу теорем курса геометрии 8 - 9 классов (на который приходится данный этап, реализуемый с использованием наиболее востребованного из учебных пособий - учебника Л.С. Атанасяна [15]) относятся теоремы таких тем, как «Четырехугольники», «Площадь», «Подобные треугольники», «Движения». Способы доказательства еще ряда теорем могут быть изменены без ущерба для логики изложения материала.

Такие изменения позволят более полно реализовать возможности, предоставляемые DGS и когнитивно-визуальным подходом для создания и использования компьютерных визуализаций при обучении дедуктивным рассуждениям [27].

Подход, предложенный В.А. Далингером, позволяет осуществить постепенный переход от оперирования образами объектов - понятий к оперированию элементами содержания понятия. Главная идея этого подхода состоит в использовании специально организованной визуальной информации в качестве средства, способного «...естественным образом влиять на различные стороны мышления, в том числе и на абстрактную, логическую» [27, с.52]. Таким образом, основным элементом реализации

когнитивно-визуального подхода при обучении доказательствам выступают «когнитивная графика, цель которой состоит в создании комбинированных когнитивных моделей представления знаний, которые сочетают в себе символические и геометрические способы мышления» [27, с.204]. Её познавательная функция состоит в способности выступать посредником «...между непосредственным созерцанием и абстрактно-логическим отражением, заключается в добывании информации о математическом объекте путем наглядно-образного преобразования схематических изображений объектов и способов действия с ними» [22, с.30]. Детализируя обозначенную В.А. Далингером познавательную функцию когнитивной наглядности, применительно к этапу обучения дедуктивному методу доказательства с использованием DGS, приходим к следующему перечню образовательно-значимых функций динамических чертежей:

- 1) синтез образа геометрической конструкции, заданной условием теоремы (задачи);
- 2) преобразование исходного образа геометрической конструкции (выявление скрытых отношений, введение дополнительных построений, изменение взаимного положения частей конструкции);
- 3) выделение части геометрической конструкции для подведения ее под новое понятие;
- 4) выделение набора элементов геометрической конструкции, свойства которых являются посылкой логического вывода;
- 5) конструирование последовательности сменяющих друг друга образов для иллюстрации цепочки преобразований, процесса предельного перехода.

Таким образом, в рамках этого подхода динамический чертеж выступает средством визуальной опоры логических действий, совершаемых в ходе объяснения экспериментально установленного факта динамической устойчивости свойства геометрической конструкции. Алгоритм построения такого чертежа в случае проведения конструктивного доказательства

совпадает с алгоритмом построения динамического чертежа для целей компьютерного эксперимента. В остальных случаях он может быть принципиально иным.

Например, если планируется решить задачу «Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны» с использованием дедуктивных рассуждений, то чертеж строится по плану, представленному в левом столбце таблицы. Если планируется проведение компьютерного эксперимента, то чертеж строится по плану, представленному в правом столбце таблицы (см. табл.21).

Таблица 21.

Статический чертеж	Динамический чертеж
1. Построим два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (при построении в ИГС воспользоваться полем «сетка»). 2. Постройте точки M, M_1 – середины сторон AB и A_1B_1 соответственно и соедините их отрезками с соответствующими вершинами треугольников. 3. Выделите треугольники ACM и ACM_1.	1. Задайте в качестве параметров a, b, α. 2. Постройте треугольник ABC (по двум сторонам a, b и углу между ними α). 3. Постройте прямую a. 4. Постройте точки, симметричные точкам A, B и C соответственно. 5. Соедините получившиеся точки отрезками, получите треугольник. 6. Постройте точки – середины сторон треугольников и соедините их отрезками с соответствующими вершинами треугольников. 7. Задайте измерения всех медиан данных треугольников.

В самом начале данного этапа обучение дедуктивным рассуждениям осуществляется в рамках постановки перед учащимися учебно-исследовательских задач, предусматривающих открытие и дедуктивное обоснование утверждений (при этом доказательство выступает, как часть системы методов математического познания). Определение учебно-исследовательской задачи (УИЗ) дано М.В. Тарановой. Под учебно-исследовательской задачей она понимает «Обобщенную цель деятельности школьника, поставленную перед учеником в виде учебного или исследовательского задания на предметной области задачи» [117]. УИЗ ею представляется в виде системы цель+задача.

Работа с такими задачами представляет собой целостный гносеологический цикл учебного математического познания. Т.А. Иванова [35] представляет его состоящим из пяти основных этапов: накопление фактов, выдвижение гипотез, проверка истинности доказательством, построение теории и выход в практику.

Покажем особенности реализации этого гносеологического цикла на конкретном примере.

Пример 16. Исследовать, существует ли зависимость между значением отношения площадей двух подобных треугольников и коэффициентом подобия. Если существует такая зависимость, то придумайте формулу, выражающую эту зависимость, подтвердите правильность формулы компьютерным экспериментом, дайте логическое объяснение.

1 Этап: Накопление фактов о существовании зависимости может явиться результатом проведения компьютерного эксперимента. Для простоты выдвижения гипотезы на его основе учащимся может быть предложено приписать коэффициенту подобия лишь целочисленные значения (рис.45).

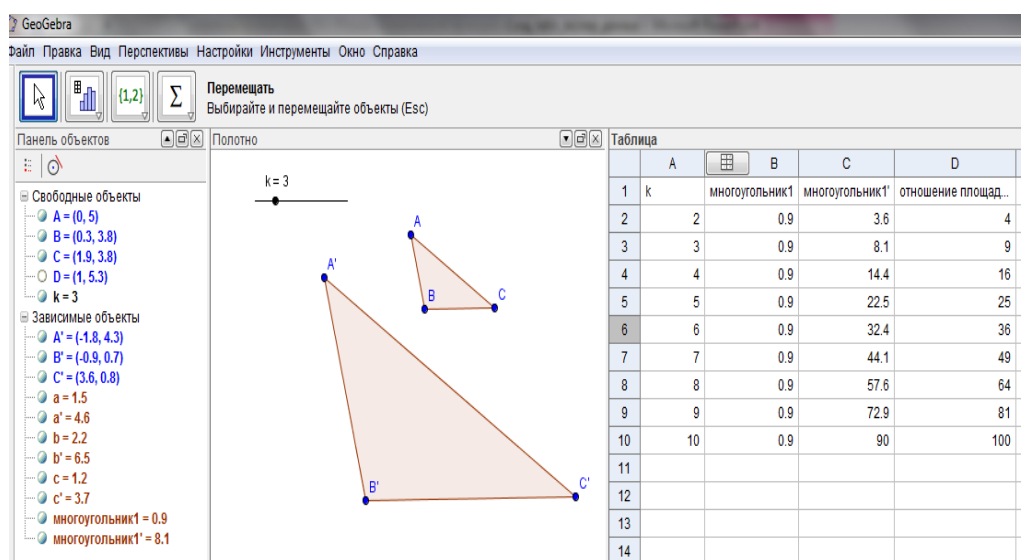


Рисунок 45.

2 этап: Выдвижение гипотезы. Результатом этого этапа является формулировка утверждения о существовании зависимости и получение формулы, выражающей эту зависимость на основе собранных данных. На этом этапе также необходимо сформировать альтернативные гипотезы,

которые служат мотивом дальнейшего доказательства утверждения и должны быть отвергнуты на этапе компьютерного эксперимента. Для облегчения получения таких утверждений, учителем может быть введена ролевая дифференциация учащихся на «генераторов идей» и «критиков». При этом задача «критиков» - сформулировать как можно больше альтернатив утверждению, высказанному «генераторами идей», например, что данное соотношение справедливо только для целочисленных значений коэффициента подобия, или что можно подобрать такие значения параметров, задающих треугольник ABC, при которых соотношение площадей будет другим (рис. 46).

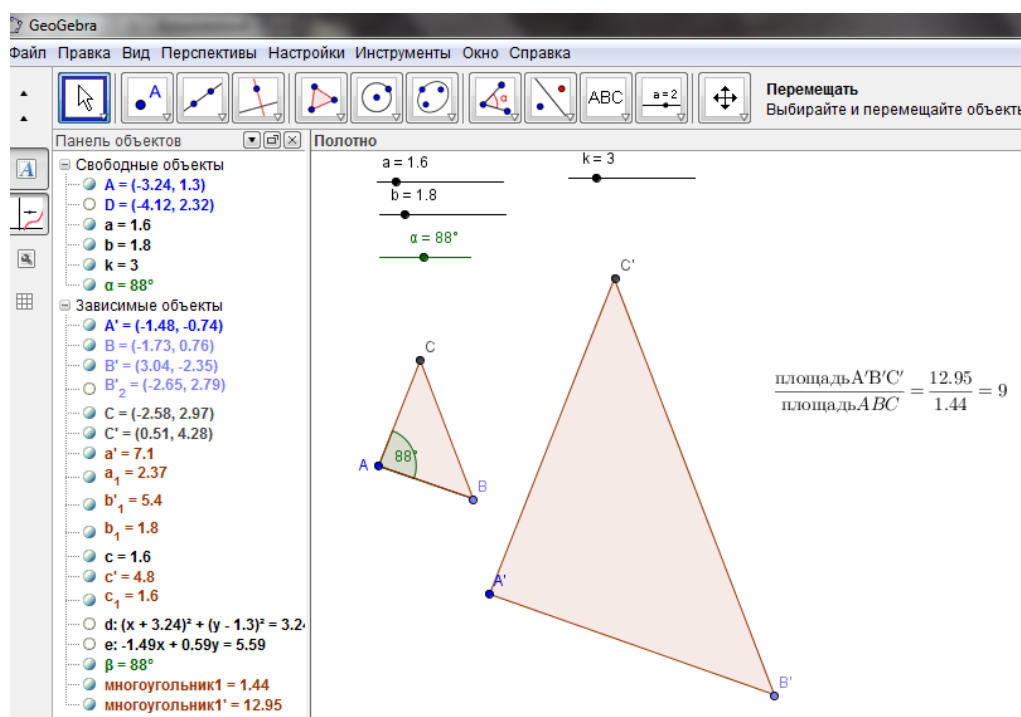


Рисунок 46.

3 этап: Опровержение альтернатив и подтверждение истинности сформулированного утверждения осуществляется с применением трех методов обоснования, включенных в содержание субъектного опыта учащихся:

- проверка методом компьютерного эксперимента;
- дедуктивное обоснование корректности динамического чертежа;
- логическое объяснение полученной зависимости.

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}a'b'\sin\gamma}{\frac{1}{2}ab\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{2}(ka)(kb)\sin\gamma}{\frac{1}{2}ab\sin\gamma} = k^2.$$

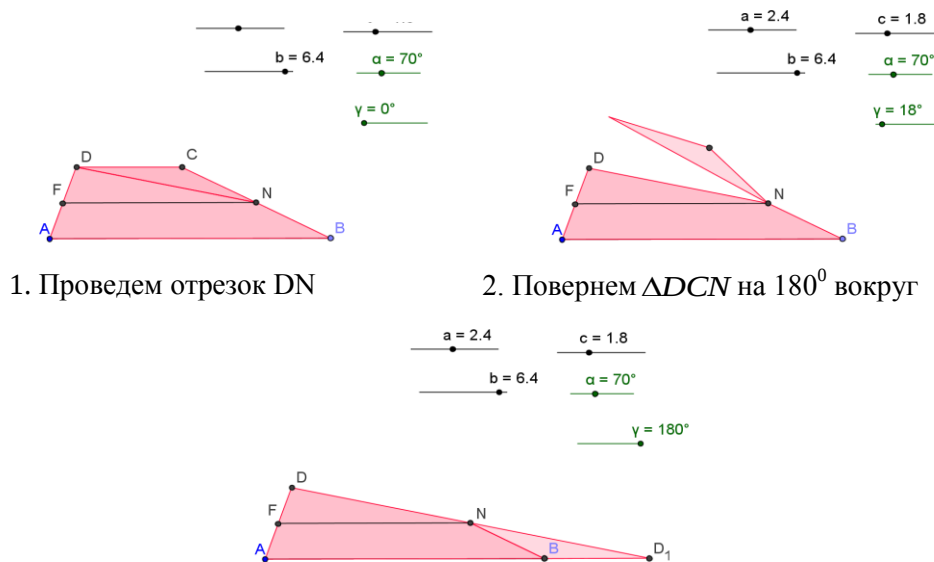
4 этап: Построение теории. Этот этап требует включения нового утверждения в систему ранее известных утверждений о подобии треугольников, т.е. оценке его теоретической значимости. На этом этапе выделяется теоретическая база доказательства теоремы, оценивается возможность получения его логических следствий и обобщений (например, на случай произвольного многоугольника в силу его триангулируемости).

5 этап: Выход в практику. На данном этапе оценивается практическая значимость полученной формулы, т.е. расширения возможности учащихся в решении вычислительных задач (например, найти площадь $\triangle ABC$, если площадь подобного ему $\triangle A_1B_1C_1=10\text{ см}^2$, а коэффициент подобия $k=5$).

В дальнейшем освоение способов построения доказательств утверждений дедуктивным методом может осуществляться в отрыве от процесса получения утверждения, т.е. в рамках решения самостоятельной задачи – *задачи на доказательство в традиционном смысле*. Этот этап полностью согласуется с традиционным подходом обучению решению задач на доказательство, подробно описанным в трудах В.А. Далингера, Г.И. Саранцева, А.А. Столяра, Е.Н. Турецкого, Л.М. Фридмана.

В этот период целесообразно широко использовать компьютерные визуализации дедуктивных рассуждений в рамках постановки *заданий на комментирование анимационно-представленных доказательств*.

Пример 17. Компьютерная визуализация доказательства теоремы «Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме»:



1. Проведем отрезок DN

2. Повернем $\triangle DCN$ на 180° вокруг

3. FN – средняя линия треугольника ADD_1 ,

$$FN = \frac{1}{2}(AB + DC) \quad FN \parallel AB \parallel DC.$$

Рисунок 47.

Главным отличием компьютерных визуализаций от предложенных В.А. Далинером когнитивно-визуальных доказательств математических утверждений является возможность сопровождения развернутых во времени дедуктивных рассуждений поэтапными изменениями визуальной опоры доказательства. Приведем в подтверждение пример, предлагаемый В.А. Далингером [21, с.209] демонстрации возможностей компьютера для иллюстрации преобразований геометрических фигур при изучении темы «Площади многоугольников» (8 класс).

«Для вывода формулы площади треугольника на экране дисплея демонстрируется один из рисунков (рис. 48 a-d):

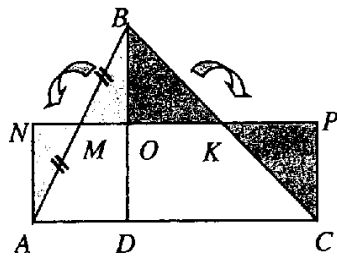


Рис. а

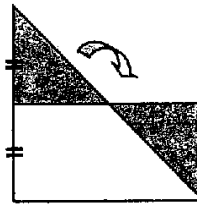


Рис. в

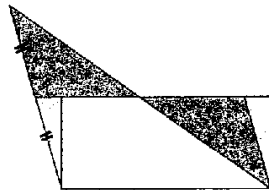


Рис. с

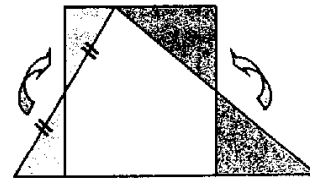
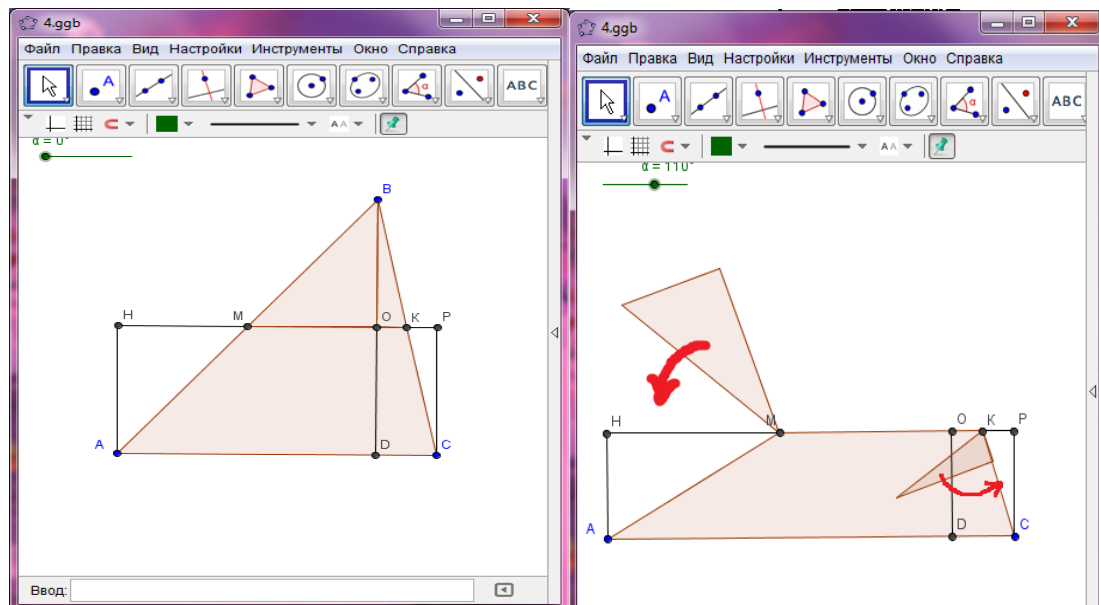


Рис. d

Рисунок 48.

Прокомментируем работу по рис. а. Программа должна быть организована так, чтобы она перемещала $\triangle BOM$ в положение $\triangle ANM$, а $\triangle BOK$ – в положение $\triangle COK$. У получившегося прямоугольника $ANPC$ основание AC то же, что и у $\triangle ABC$, а его высота равна половине высоты треугольника. Отсюда сразу видно, что $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$ » [21, с.75].

Продemonстрируем, как можно представить вывод этой же формулы площади треугольника в DGS GeoGebra (рис. 49).



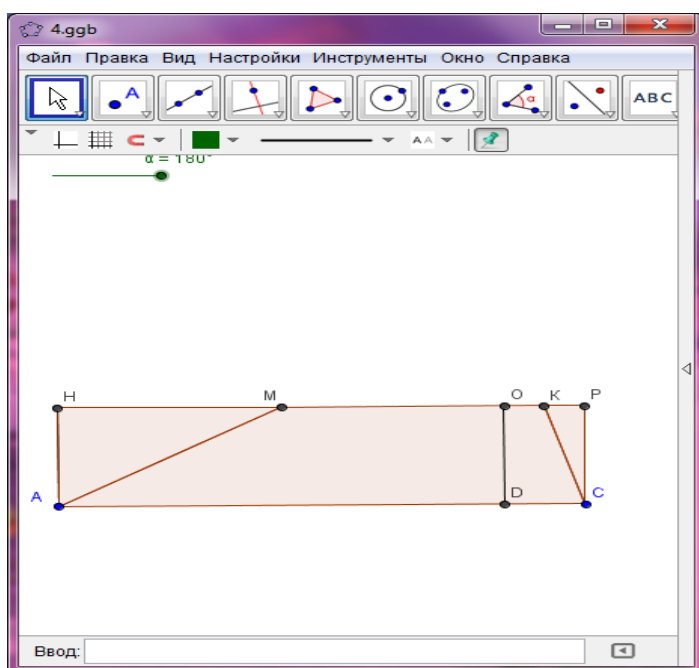


Рисунок 49.

Для создания модели можно воспользоваться *инструментом ползунок* и параметризовать угол поворота треугольников $\triangle BOM$ и $\triangle BOK$. Затем, воспользовавшись *инструментом поворот вокруг точки на угол*, переместить эти треугольники в положение треугольников $\triangle ANM$ и $\triangle CPK$ соответственно. Данная визуализация преобразования фигуры более наглядно демонстрирует вывод формулы площади треугольника.

На заключительном этапе овладения дедуктивным методом доказательства можно вновь установить связь дедуктивного подхода с исследовательским за счет включения учащихся в деятельность решения *задач на исследование доказанного утверждения (исследование выступает как поиск новых утверждений по доказанному)*

Пример 18. Пусть учащимися решена следующая задача на доказательство.

В треугольник $\triangle ABI$ вписан ромб $CEFD$ (см. рис.50), так что $AC=CD=DB$. Докажите, что $\triangle ABC$ – прямоугольный.

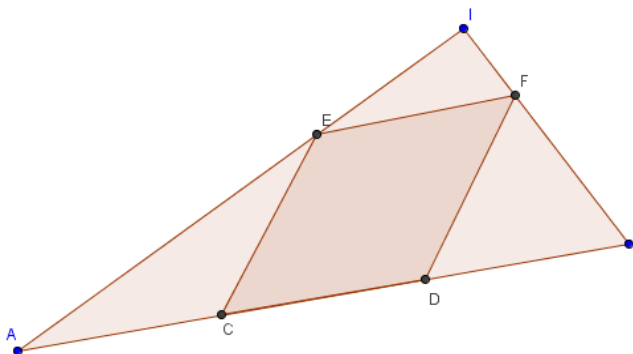


Рисунок 50.

Развитие идеи данной задачи может осуществляться в разных направлениях: преобразование условия и требования, использование комбинаций этих преобразований. Наиболее часто эффект достигается за счет использования последнего направления, при этом целесообразно начинать с преобразования требования задачи.

1. Преобразование требования задачи:

- замена требования задачи вопросом *«Какие еще свойства можно вывести из этих данных?»* (задачи с подобными требованиями называются открытыми» [47, 110, 111]);

- замена требования новым нечетким требованием, например, *«Установить, есть ли связь между площадями треугольника и площадью ромба»* или *«Установить связь между равенством отрезков $AC=CD=DB$ и размером углов $\angle AEC$ и $\angle IEF$ »*.

2. Преобразование условия задачи:

- дополнить геометрическую конфигурацию задачи с открытым или нечетко сформулированным требованием новыми элементами, например, провести диагонали ромба (это значительно расширит круг свойств, которые обнаружат учащиеся);

- осуществить переход к частной задаче с открытым или нечетко сформулированным требованием указания дополнительных свойств фигур, например, потребовать вписать в треугольник квадрат;

- указать динамическое изменение данных в задаче с открытым или нечетко сформулированным требованием, например, изменение угла ромба или соотношения отрезков;

Принципиально новые возможности дает замена данных требованием:

1. Если при этом условие задачи не меняется, то получается обратная задача, которую за счет изменения новых требований можно преобразовать в исследовательскую. Например, «*В прямоугольный треугольник $\triangle ABC$ вписан ромб $CEFD$. Обязаны ли отрезки AC , CD и DB быть равными?*».

2. Если при этом в условии задачи некоторые свойства заменить более слабыми, то получим обобщение обратной задачи. Например, «*В треугольник вписан ромб (см. рис.50). Как зависит от величины угла $\angle AIB$ соотношение отрезков AC , CD и DB ?*»

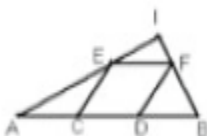
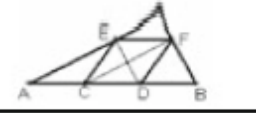
3. Если при этом в условии задачи некоторые свойства заменить более сильными, то получим частный случай обратной задачи. Например, «*В прямоугольный треугольник $\triangle ABC$ вписан квадрат $CEFD$. Обязаны ли отрезки AC , CD и DB быть равными?*».

Подобные способы получения новых исследовательских задач описаны в статьях В.И. Рыжика [100, 101, 51]. Он называет исследовательские задачи, полученные путем преобразования уже решенной задачи, «стрелой задач».

Деятельность по постановке таких задач (не учащимися, а учителями) была исследована в статье [167]. Интересным является тот факт, что их исследованиями были выявлены следующие различия между способами, которые используют те, кто привык работать в DGS, и те, кто не знаком с этими средами (табл. 22).

Таблица 22.

1. Никаких изменений в данных	Статические изменения в данных		4. Динамические изменения в данных (параметризация)
	2. Изменение начальных данных (усиление и ослабление свойств объекта)	3. Добавление или перестройка объектов	
А. Цель первоначальная			
Постройте	Не применяется.	Постройте	Бессмысленно.

треугольник $\triangle ABC$, – ромб, и ромб $CEFD$, вписанный в этот треугольник, причем $AC=CD=DB$. Что вы можете сказать о треугольнике?	Первоначальная цель изменилась.	треугольник $\triangle ABC$, – и параллелограмм $CEFD$, вписанный в этот треугольник, причем $AC=CD=DB$. Что вы можете сказать о вписанном четырехугольнике, о треугольнике?	Когда добавляются данные, изменяются и свойства.
В. Изменение первоначальной цели			
Не применимый. Исходные данные без изменений.	Обратная задача: Учитывая, что треугольник $\triangle ABC$ прямоугольный, и в него вписан ромб $CEFD$, что вы можете сказать про отрезки AC , CD и DB ?	Какой параллелограмм вписан в прямоугольный треугольник?	Для каких треугольников можно вписать в них ромбы?
С. Изменяем требования			
Возможно ли, что эти два треугольника $[FDB, ECA]$ равны? 	не наблюдается	Что вы можете сказать о площади параллелограмма $AEFC$ и $BFED$ и площади ромба?	Изменяя треугольник $\triangle ABC$, проверьте, что происходит с площадью вписанного ромба, существует ли связь между площадями.
Д. Нет четкого требования			
Какова связь между равенством отрезков и размером углов?	не наблюдается	3D (Hadas) Построить диагонали в ромбе $[EDCF]$ и посмотреть дополнительные свойства. 	При каком условии площадь ромба станет наибольшей?

Выводы по параграфу. В основу практической реализации предлагаемой нами модели поэтапного формирования умений, связанных с проведением доказательства теорем при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием GeoGebra, нами положен *механизм интеграции* социокультурного и субъектного опытов, предложенный И.С. Якиманской. Он включает три основных этапа: 1) актуализация и

раскрытие содержания субъектного опыта учащихся; 2) «окультуривание» опыта путем переосмысления его под воздействием субъектных опытов учителя и других учащихся в направлении сближения с социокультурным опытом; 3) формирование нового субъектного опыта на базе имеющегося.

Для реализации этого механизма в курсе геометрии должны быть созданы методические условия, адекватные методической схеме интеграции социокультурного и субъектного опытов, связанных с оценкой и обоснованием истинности утверждения, а также целям обучения доказательству в основной школе и достигнутым на предыдущих этапах уровням овладения дедуктивным методом доказательства.

Содержательные условия представлены основными теоремами школьного курса геометрии, относимыми к изучаемым темам, а также специальными видами задач на обоснование утверждений, которые позволяют реализовывать методическую схему интеграции социокультурного и субъектного опытов в глобальном смысле в соответствии с целями каждого этапа.

Виды задач для реализации I этапа (табл. 23):

Таблица 23.

Этапы интеграции	Виды задач
Актуализация и раскрытие содержания опыта	1. На демонстрацию и описание способов использования динамических чертежей для проверки утверждений, для выбора наиболее убедительного из нескольких альтернатив.
Окультуривание	2. На проверку соответствия выводов экспериментальным данным. 3. На проверку соответствия способа проведения контрольного эксперимента характеру сомнений 4. На проверку достаточности экспериментальной проверки для установления истинности утверждения. 5. На выбор способа построения динамического чертежа для проведения контрольного эксперимента.
Формирование нового опыта	6. На формирование умений формулировать альтернативы, сомнения в истинности утверждения. 7. На формирование умений фиксировать и анализировать экспериментальные данные, делать адекватные выводы. 8. На формирование умений планировать и проводить контрольный КЭ в соответствии с характером сомнений. 9. На формирование умений создавать динамический чертеж для проведения контрольного эксперимента.

Виды задач для реализации II этапа (табл. 24):

Таблица 24.

Этапы интеграции	Виды задач
Актуализация и раскрытие содержания опыта	1. На создание своих динамических чертежей для проведения контрольного эксперимента и описание алгоритмов их построения.
Окультуривание	2. На тестирование динамических чертежей с целью оценки их пригодности для проведения контрольного эксперимента. 3. На выбор алгоритма построения динамического чертежа, соответствующего цели контрольного эксперимента. 4. На оценку соответствия алгоритма построения указанным в посылке утверждения свойствам объекта.
Формирование нового опыта	5. На формирование умения формулировать утверждение, лежащее в основе алгоритма построения динамического чертежа. 6. На формирование умения формулировать цепочку утверждений, использованных для создания алгоритмов построения отдельных элементов (объектов) динамического чертежа. 7. На формирование умения теоретически обосновывать шаги построения динамического чертежа. 8. На формирование умения видеть свойства объекта исследования, которые определяются алгоритмом его построений.

Виды задач для реализации III этапа (табл. 25):

Таблица 25.

Этапы интеграции	Виды задач
Актуализация и раскрытие содержания опыта	1. На формулировку новых свойств динамического чертежа с опорой на алгоритм его построения с объяснением механизмов связей свойств.
Окультуривание	2. На критическую оценку эффективности компьютерного эксперимента как метода установления истинности утверждений. 3. На анализ готовых доказательств, демонстрирующих различные способы и приемы обоснований, обоснование утверждений разных видов.
Формирование нового опыта	4. На построение собственных доказательств с опорой на компьютерные визуализации. 5. На логическое объяснение экспериментально установленных фактов. 6. На привлечение дедуктивного метода к решению исследовательских задач. 7. На постановку исследовательских задач на основе доказанного утверждения.

Организационные условия представлены методикой работы с теоремами, адекватными по своей структуре этапам исследовательского цикла учебного познания с учетом достигнутого уровня овладения дедуктивным методом:

I этап: постановка проблемы, выдвижение гипотезы, проверка гипотезы, модификация.

II этап: постановка проблемы, выдвижение гипотезы, проверка гипотезы и логический контроль правильности алгоритма построения, модификация.

III этап: постановка проблемы, выдвижение гипотезы, доказательство, модификация.

Материально-технические условия представлены готовыми динамическими чертежами для проведения контрольных компьютерных экспериментов; схемами оформления отчета о ходе их проведения и результатах; образцами записи алгоритмов построения динамических чертежей; образцами их обоснований статическим методом; компьютерными визуализациями доказательств теорем и решения задач на доказательство.

Соблюдение всех вышеперечисленных условий обеспечит преобразование естественного для учащихся эмпирического (исследовательского) подхода к получению новых знаний в теоретический подход сначала за счет использования дедукции, как вспомогательного метода (контролирующего корректность исследовательской модели), а затем применение дедукции как ведущего метода, обеспечивающего обоснование и объяснение установленных фактов и получения нового выводного знания. Тем самым данная методика позволяет преодолеть «экспериментально-теоретический разрыв» в обучении геометрии, вызванный использованием DGS в качестве инструмента учебной деятельности.

2.3. Эксперимент и обработка его результатов

Экспериментальная часть нашего исследования имела главной целью проверить эффективность теоретически разработанной методики обучения доказательству геометрических теорем учащихся основной школы с использованием ИГС.

Экспериментальное исследование состояло из трех этапов и проводилось в течение четырех лет (2010 – 2013 г.г.).

I Констатирующий этап эксперимента (2010-2011 уч.год) был направлен на сбор данных о критериях убедительности, входящих в

содержание субъектного опыта учащихся, связанного с оценкой справедливости утверждений, а также на выявление наиболее типичных субъективных критериев убедительности для учащихся 7 классов, приступающих к изучению систематического курса геометрии.

II Поисковый этап эксперимента (2011-2012 уч.год) был посвящен сбору дополнительных данных о методических условиях, обеспечивающих в процессе изучения геометрии переход от использования *критерия наглядной убедительности* к использованию *критерия логической сводимости утверждения к известным*.

III Формирующий этап эксперимента (2012-2013 уч.год) имел целью проверить справедливость гипотезы исследования о том, что формирование умений, связанных с проведением доказательства теорем при обучении геометрии в основной школе с использованием GeoGebra, будет успешным, *если*:

- в процессе обучения доказательству теорем *будет осуществлен* поэтапный переход от овладения методом компьютерного эксперимента к овладению дедуктивным методом на основе осознания учащимися границ, норм и условий их применения;

- при проектировании условий обучения доказательству *будет реализована* идея интеграции содержания субъектного опыта учащихся, связанного с проверкой истинности утверждений экспериментальным методом, с социокультурным опытом аргументации утверждений в коммуникативной деятельности и опытом доказательства утверждений в математике с применением дедуктивного метода;

- при работе с теоремой DGS GeoGebra *будет использована* не только в качестве средства, подводящего учащегося к открытию факта теоремы, но и в качестве средства предварительной проверки истинности гипотез и визуализации шагов доказательства.

В качестве базы проведения эксперимента на всех его этапах выступали школы Архангельской области, являющиеся пилотными

площадками Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании (МИТЕ)», реализуемого под эгидой Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки Российской Федерации: г. Архангельск: МБОУ СОШ №1, МБОУ СОШ №8, МБОУ СОШ №20, МБОУ СОШ №24, МБОУ СОШ №25, МБОУ СОШ №34, МБОУ СОШ №37, МБОУ СОШ №51, МБОУ СОШ №55, МБОУ СОШ №57, МБОУ СОШ №95, МБОУ ОСОШ, МБОУ «ОГ № 21», ГБОУ АКШИ АМКК г.Архангельска, МАОУ СОШ № 2 г. Северодвинска, МБОУ СОШ № 24 г. Северодвинска, МБОУ «СОШ № 90» п. Кулой Вельский р-н, МБОУ «Верхнее-Матигорская средняя школа», Холмогорский р-н, МБОУ Усть-Шоношская СОШ № 19, МБОУ «Пежемская СОШ №14», МБОУ «Левковская СОШ № 7», МБОУ «Солгинская СОШ № 86», МБОУ «СОШ №92 г. Вельска», МБОУ «Аргуновская ООШ № 11», МБОУ «Судромская ООШ №13», МБОУ «Угреньгская ООШ № 10», МБОУ СОШ № 3 г. Вельск (27 школ, общее количество испытуемых 676 чел.).

Опишем каждый из этих этапов экспериментального исследования подробно.

2.3.1. Проведение констатирующего этапа эксперимента и обработка его результатов.

В ходе констатирующего эксперимента необходимо было решить следующие задачи:

1. Выявить критерии убедительности, входящие в содержание субъектного опыта учащихся 7 класса, связанного с проверкой высказанных утверждений.

2. Установить, каким из субъективных критериев убедительности учащиеся, приступающие к изучению систематического курса геометрии, отдают приоритет при обосновании утверждений геометрии.

Теоретическую основу исследования на этом этапе составляли положения социальной психологии и философии, в которых раскрывается

сущность понятия «субъективный критерий убедительности», а также описываются критерии и показатели оценки их субъективной значимости.

Проведенный нами анализ литературы по психологии [54], по философии [73], методике преподавания математике [19, 33] показал, что:

- убеждение рассматривается в двух аспектах: как результат и как процесс (деятельность);
- убежденность - это внутреннее согласие, принятие в качестве истины высказанной идеи, утверждения или системы идей;
- убеждение (как процесс) - это воздействие на сознание человека посредством аргументов, призванное изменить критическое отношение человека к высказанному утверждению, идеи, системы идей (противопоставляется внушению, воздействующему на подсознание), т.е. достичь его убежденности;
- основными факторами, влияющими на действенность убеждения, являются: степень доверия к источнику сообщения (коммуникатору), наличие предубеждения (собственного мнения у реципиента), яркость эмоциональной окраски убеждающих воздействий коммуникатора, согласованность критериев убедительности, используемых коммуникатором с субъективными критериями убедительности реципиента, определяемых его когнитивным стилем;
- субъективный критерий убедительности - это осознанно или бессознательно установленное респондентом пороговое значение аргументации определенного типа, при переходе через которое меняется его отношение к утверждению коммуникатора.
- выделяют следующие типы субъективных критериев убедительности: критерий авторитетности, критерий признанности большинством, критерий практики, критерий наглядности, критерий привлекательности, критерий логической сводимости к истинным утверждениям (подкритерии: формализуемость, правильность,

естественность, простота, понимаемость, обозримость, правильность дедуктивных рассуждений).

- показателем выбора критерия убедительности является аргументация, используемая человеком для объяснения своего отношения к идее, утверждению, системе идей.

В соответствии с установленным показателем для сбора данных о субъективных критериях убедительности учащихся 7 класса, значимых для освоения положений геометрии, был использован следующий комплекс методов:

1) контрольные срезы, основу которых составляли задания на выбор истинного геометрического утверждения в предложенной серии с указанием одной из альтернативных причин выбора (1- написано в учебнике, 2 - могу провести доказательство, 3 - его выбрало большинство учащихся класса, 4 - часто пользуюсь, 5- видно из рисунка, 6- мне больше нравится);

2) наблюдение за деятельностью учащегося в ситуации оценки истинности геометрического утверждения и бытового суждения (метод «мышление вслух»).

В результате были собраны следующие данные о субъективных критериях убедительности учащихся (в обследовании участвовало 117 учащихся 7 класса, обследование проводилось в период изучения первой темы систематического курса геометрии):

Таблица 26.

Критерии убедительности	1	2	3	4	5	6	Всего (уч-ся)
1. Использование для оценки геометрических утверждений	6	9	5	45	47	5	117
2. Использование для оценки бытовых суждений	8	5	10	52	37	5	117

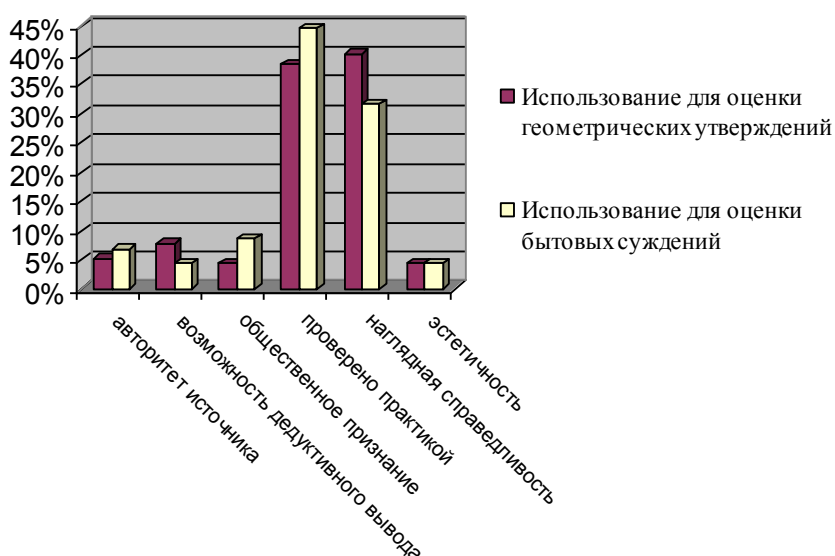


Рисунок 51. Результаты диагностики критериев убедительности, входящих в субъектный опыт учащихся, приступающих к изучению геометрии.

Анализ графического представления распределений позволяет предположить, что критерии убедительности, сложившиеся под воздействием обоснования истинности бытовых суждений, сохраняют свое значение и в ситуациях обоснования геометрических утверждений.

Для оценки значимости различий двух распределений номинативного признака «выбор критерия убедительности», полученных на зависимых выборках, (обследовались одни и те же учащиеся) использовался критерий χ^2 - Пирсона, применяемый для сопоставления двух эмпирических распределений. «Преимущество метода состоит в том, что он позволяет сопоставлять распределения признаков, представленных в любой шкале, начиная со шкалы наименований» [108, с.113].

Полученные данные удовлетворяют ограничениям критерия (см.табл.27):

Таблица 27.

Ограничения критерия	Характеристика данных	
1. Объем выборки не менее 30	117 человек	
2. Теоретическая частота каждого значение не меньше 5	117/6 =19,5	
3. Нет пустых значений	Нет	Нет
5. Сумма частот равна объему выборки	Да	Да

Проверялась гипотеза H_0 - эмпирическое распределение 1 не отличается от эмпирического распределения 2 (табл.25).

Всего $117 \cdot 2 = 234$ выбора, из них 117 – для оценки геометрических утверждений, 117 - для оценки бытовых суждений. Доля в обоих случаях будет равна $117 / 234 = 0,5$. Итак, зная суммы выборов по каждому критерию, можно сосчитать теоретические частоты для каждой ячейки (табл.28).

Таблица 28.

№	Эмпирические частоты f_o	Теоретические частоты f_T	$f_o - f_T$	$(f_o - f_T)^2$	$(f_o - f_T)^2 / f_T$
1.1	6	7	-1	1	0,142857
2.1	8	7	1	1	0,142857
1.2	9	7	2	4	0,571429
2.2	5	7	-2	4	0,571429
1.3	5	7,5	-2,5	6,25	0,833333
2.3	10	7,5	2,5	6,25	0,833333
1.4	45	48,5	-3,5	12,25	0,252577
2.4	52	48,5	3,5	12,25	0,252577
1.5	47	42	5	25	0,595238
2.5	37	42	-5	25	0,595238
1.6	5	5	0	0	0
2.6	5	5	0	0	0
Сумма	234	234	0	97	4,790869

Число степеней свободы при сопоставлении двух эмпирических распределений определяется по формуле: $\nu = (k-1) \cdot (c-1)$, где k -число разрядов (в нашем случае $k=6$), c – количество сравниваемых распределений (в нашем случае $c=2$). Итак, $\nu = (6-1) \cdot (2-1) = 5$. По таблице IX [108, с.328] получаем $\chi_{кр.}^2 = 11,07$ при уровне значимости 0,05 и $\chi_{ед.}^2 = 15,086$ при уровне значимости 0,01. Т.к. $\chi_{эмт.}^2 = 4,79$, получаем $\chi_{эмт.}^2 < \chi_{кр.}^2$. Значит, гипотеза H_0 (эмпирическое распределение 1 не отличается от эмпирического распределения 2) принимается на уровне значимости 0,05.

Вывод 1. Таким образом, результаты статистического анализа данных констатирующего эксперимента подтвердили наше предположение о том, что учащиеся, приступающие к изучению систематического курса геометрии, пользуются теми же критериями убедительности, которые применяются ими и для обоснования истинности обыденных суждений.

Выделим из критериев убедительности, входящих в содержание субъектного опыта учащихся, те, которые являются наиболее значимыми для них. Для этого используем принцип Парето – наиболее значимыми будем считать те критерии в ряду, упорядоченному по частоте использования, на которые приходится 80% накопленной частоты. Для этого сначала ранжируем критерии убедительности по частоте их выбора в ситуациях оценки геометрических утверждений (см. рис.52). Из полученной диаграммы видно, что наиболее предпочтительными для учащихся в соответствии с принципом Парето являются два критерия: критерий практики и критерий наглядности.

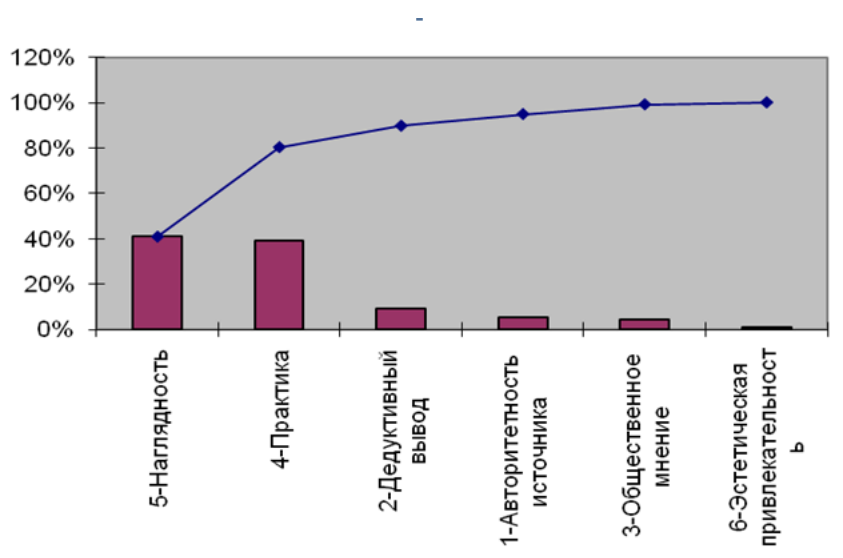


Рисунок 52.

Вывод 2. Эксперимент показал, что наиболее значимыми для учащихся, приступающих к изучению систематического курса геометрии, являются такие критерии, включенные в содержание их субъектного опыта, как критерий наглядности и критерий практики.

Выводы 1 и 2 подтверждают наше предположение о необходимости использования на первых этапах обучения доказательству в 7 классе метода компьютерного эксперимента, т.к. он апеллирует к этим двум критериям.

2.3.2.Поисковый этап эксперимента и его результаты.

Для проведения поискового эксперимента нами была проведена модификация задач на доказательство и образцов доказательства теорем

школьного курса геометрии [75], включенных в учебное пособие [15]. Основная цель модификации – создание условий, обеспечивающих возможность использования различных методов проверки истинности утверждений, а также сочетания нескольких методов. Проиллюстрируем конкретными примерами цели и результаты модификации задач (пример 1)

Пример 1. Модифицированные задачи на доказательство геометрических утверждений

Таблица 29.

1.Задача на проведение контрольного компьютерного эксперимента по схеме	<i>Пользуясь готовым динамическим чертежом, соберите экспериментальные данные, подтверждающие справедливость утверждения: если биссектриса треугольника совпадает с его высотой, то треугольник равнобедренный.</i>
2.Задача на планирование и проведение своего контрольного компьютерного эксперимента	<i>Экспериментально проверьте справедливость утверждения: в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны.</i>
3.Задача на обоснование корректности виртуальной модели.	<i>Для проверки утверждения «Биссектрисы вертикальных углов равны» был создан динамический чертеж. Выведите на экран протокол его построения, пользуясь им, восстановите алгоритм. Пользуясь им, оцените корректность работы динамического чертежа в ходе компьютерного эксперимента. Если необходимо, внесите коррективы в динамический чертеж и проведите эксперимент.</i>
4.Задача на комментирование компьютерной визуализации доказательства	<i>Запишите доказательство формулы площади трапеции, пользуясь его компьютерной визуализацией.</i>
5.Задача на доказательство дедуктивным методом	<i>Дедуктивно докажите, что площади подобных треугольников относятся как квадраты коэффициентов подобия.</i>
6.Задача на выбор или комбинирование способов обоснования	<i>Методом компьютерного эксперимента проверьте справедливость утверждения: «Если ромб вписан в окружность, то это – квадрат». Обоснуйте полученный результат.</i>

Перед учителями - экспериментаторами была поставлена задача опытным путем уточнить возрастные границы проведения учащихся по

уровням обучения доказательству, а также высказать свои пожелания относительно дополнительных учебно-методических материалов, которые необходимы для практической реализации методики обучения доказательству с DGS GeoGebra.

Для сбора данных были использованы следующие методы:

1) самонаблюдение за результатами принятия методических решений с заполнением контрольного листа

Класс _____

Тема	Урок	№ задачи/ формулировка теоремы	№ модификации (1-6)

2) анкетирование учителей - открытый опрос

Уровни обучения доказательству	Цель обучения	Необходимые учебно-методические материалы
Уровень овладения эмпирическими методами проверки утверждений	Формирование умений подтверждать истинность геометрических положений с помощью компьютерного эксперимента: планировать, проводить, обрабатывать и анализировать данные, формулировать адекватные выводы	
Уровень овладения логическими методами контроля корректности технических средств, применяемых в ходе компьютерного эксперимента	Формирование умений обосновывать адекватность динамической модели исходным данным	
Уровень овладения дедуктивным методом доказательства	Формирование умений логически объяснять факт динамической устойчивости свойств конструктивного объекта, логически выводить утверждение о динамической устойчивости свойств конструктивного объекта из сведений о его заданных свойствах.	

На данном этапе в обследовании участвовало 42 учителя-экспериментатора.

Выводы. В результате были выделены темы школьного курса геометрии, при изучении которых методически целесообразно осуществлять переход от освоения доказательства на одном уровне к другому: «Треугольники» (7 класс) – переход на уровень обучения обоснованию правильности построения динамических чертежей, т.к. в содержание данной темы включены правила построения циркулем и линейкой; «Четырехугольники» (8 класс) - переход на уровень обучения дедуктивному методу доказательства, т.е. содержание данной темы богато теоремами, которые доказываются методом установления соотношений в треугольниках.

Получен перечень необходимых учителям материалов для реализации разработанной нами методики: готовые динамические чертежи для проведения контрольных компьютерных экспериментов; схемы оформления отчета о ходе их проведения и результатах; образцы записи алгоритмов построения динамических чертежей; образцы их обоснований статическим методом; компьютерные визуализации доказательств теорем и решения задач на доказательство.

2.3.3. Формирующий этап эксперимента и его результаты

Экспериментальное обучение проводилось по базовому УМК Л.С. Атанасяна [15] и электронного дополнения «Наглядная планиметрия» [96, 97, 98]. Обучение осуществлялось в соответствии с планированием, представленным в [75], и предусматривало различные виды уроков [76]: компьютерные (проводимые в компьютерном классе) и традиционные (с использованием мультимедийного оборудования). Пример компьютерного урока представлен нами в [141, 143].

Примерное тематическое планирование обучения геометрии с использованием GeoGebra представлено в табл. 30:

Таблица 30.

	Тема	Кол-во	Кол-во	Контрольные
--	------	--------	--------	-------------

		компьютерных уроков, час	традиционных уроков, час	работы
7 класс	Начальные геометрические сведения	4	5	№ 7.1
	Треугольник	8	8	№ 7.2
	Параллельные прямые	4	4	№ 7.3
	Соотношения между сторонами и углами треугольника	7	7	№ 7.4
	Соотношения в треугольнике. Задачи на построение.	4	4	№ 7.5
	Повторение	1	2	
8 класс	Четырехугольники	7	7	№ 8.1
	Площади фигур	7	7	№ 8.2
	Подобные треугольники	9	9	№8.3-№ 8.4
	Окружность	9	9	№8.5
	Повторение	2	2	
9 класс	Векторы	5	5	№ 9.1
	Метод координат	4	4	№ 9.2
	Соотношение между сторонами и углами треугольника.	7	7	№9.3
	Длина окружности и площадь круга.	7	7	№ 9.4
	Движения.	4	4	№9.5
	Начальные сведения из стереометрии.	4	4	
	Повторение.	4	5	

При обучении доказательству использовались задачи и рекомендации, представленные в приложении №1.

Характеристика групп испытуемых представлена в табл. 31:

Таблица 31.

	7 класс	8 класс	9 класс
Кол-во учащихся	676	671	674

В качестве показателя сформированности умений, связанных с проведением доказательств, выступала успешность решения учащимися *задач на обоснование геометрических утверждений*, которые по своей формулировке допускают возможность самостоятельного выбора методов

проверки и обоснования утверждений [75]: метода контрольного компьютерного эксперимента и дедуктивного метода.

Для контроля динамики изменений в выборе критериев убедительности и овладения соответствующими методами обоснования утверждений использовались соответствующие задания тематических контрольных работ [75].

Критериев сформированности умений, связанных с проведением доказательств, при этом рассматривалось несколько:

K_1 - успешность решения диагностических задач выбранным методом

K_2 - соответствие выбора критерия убедительности задачной ситуации:

1) описанию стилевых особенностей оппонента, включенных в сюжетный план задачи; 2) описанию характера сомнений в истинности утверждения, включенного в требование задачи; 3) указанным в требовании задачи функциям доказательства.

Успешность решения диагностической задачи оценивалась по 50-бальной шкале, т.е. могла принимать значения от 0 до 50, в зависимости от степени продвижения ученика в решении задачи [75]. В связи с тем, что учителя-экспериментаторы принимали активное участие в составлении задач каждой контрольной работы, то подходы к оценке решений учащихся по этому критерию были ими согласованы.

Соответствие выбора критерия убедительности задачной ситуации оценивалось по 3-х бальной шкале: «0» - выбранный метод/методы (критерий убедительности) не соответствует задачной ситуации; «1»- частичное соответствие выбранных методов (критериев убедительности) условию задачи; «2»- - полное соответствие выбранных методов (критериев убедительности) условию задачи.

Приведем в качестве примера диагностическую задачу из контрольной работы 8 класса по теме «Четырехугольники» (№ 8.1).

Пример:

На динамической модели ромба ABCD постройте биссектрису угла DCA. Найдите углы ромба, при которых эта биссектриса перпендикулярна стороне AD. Объясните полученный результат.

При выполнении этого задания учащиеся, выбирающие экспериментальный метод, разбивают задачу на две части: 1-я – экспериментальное нахождение величин углов, 2-е – объяснение (обоснование) полученных результатов. При решении задачи дедуктивным методом такого разделения не происходит. Опишем возможные варианты решений учащихся.

Первый вариант. Учащиеся строят произвольный ромб ABCD (пользуясь определением или одним из известных признаков ромба), при этом отвлекаясь от условия: угол между биссектрисой угла DCA и стороной AD равен 90° , проводят биссектрису угла DCA, задают измерение углов ромба и угла между биссектрисой и стороной AD, методом компьютерного эксперимента в GeoGebra получают ромб, обладающий свойством - угол между биссектрисой угла DCA и стороной AD равен 90° , такой ромб будет иметь углы 60° , 120° , 60° , 120° . Вторая часть задачи при выборе этого способа может состоять в ссылке на очевидность полученного результата, либо в дополнении разведочного эксперимента серией контрольных, либо в обосновании полученного результата дедуктивным методом.

Второй вариант. Учащиеся строят ромб ABCD, обладающий заданным свойством, а затем измеряют его углы. При объяснении они могут либо сослаться на результаты измерения, либо указать, что такие величины углов вытекают из алгоритма построения, либо представить доказательство дедуктивным методом.

Третий вариант. Учащиеся решают задачу дедуктивным методом без привлечения DGS.

При оценке результатов решения задачи учащимися по критерию K_2 (соответствие выбора критерия убедительности задачной ситуации) учитель ставит «0» баллов в том случае, если ученики выбрали первый или второй

вариант решения и при объяснении сослались на очевидность результата, полученного измерением. Учитель поставит «1» балл в том случае, если ученик выбрал первый вариант решения и дополнил его серией контрольных экспериментов или выбрал второй вариант решения и сослался на то, что результат определяет алгоритм построения без демонстрации этой связи. Учитель поставит «2» балла в том случае, если ученик либо выбрал первый или второй вариант решения и дополнил обоснованием результата дедуктивным методом, либо сразу решил задачу дедуктивным методом.

При оценке результатов решения задачи учащимися по критерию K_1 (успешность решения диагностических задач выбранным методом) учитель оценивает задачу в баллах от 0 до 50 по степени полноты решения тем или иным способом.

В результате измерений были получены следующие ряды распределений (таблица 32):

Таблица 32.

Распределения значений случайной величины «Рациональность выбора критерия убедительности»

уровень		I	II						III								
№ к.р.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Значения рациональности выбора	0	267	197	201	267	231	293	245	245	232	296	238	262	254	260	243	
	1	214	254	245	198	214	158	189	167	199	146	213	155	139	165	146	
	2	195	215	185	205	215	225	235	250	240	230	225	250	255	245	280	



Рисунок 53.

Таблица 33.

Распределения значений случайной величины «Успешность решения задачи
выбранным методом»

Описательные статистики								
	N	Среднее	Стд. отклонение	Минимум	Максимум	Процентили (квантили)		
						25%	50% (Медиана)	75%
(кр7.1)	676	17,0000	8,80848	,00	50,00	20,0000	20,0000	25,0000
(кр7.2)	672	21,2222	13,17883	,00	50,00	20,0000	20,0000	30,0000
(кр7.3)	676	20,5231	14,69552	,00	55,00	10,0000	20,0000	30,0000
(кр7.4)	670	19,7423	13,54058	,00	50,00	19,7423	19,7423	30,0000
(кр7.5)	669	22,7155	12,22293	,00	50,00	20,0000	20,0000	25,0000
(кр8.1)	659	19,9143	9,31887	,00	45,00	17,9143	17,9143	17,9143
(кр8.2)	670	19,0000	4,73948	,00	40,00	19,0000	19,0000	19,0000
(кр8.3)	645	26,8750	4,79768	,00	40,00	26,8750	26,8750	30,0000
(кр8.4)	671	24,4590	7,20548	3,00	30,00	24,4590	24,4590	30,0000
(кр8.5)	666	26,2500	5,28127	,00	40,00	26,2500	26,2500	26,2500
(кр9.1)	639	23,0000	4,11392	,00	40,00	16,0714	16,0714	16,0714
(кр9.2)	674	24,0000	8,20702	,00	40,00	22,1026	22,1026	22,1026
(кр9.3)	659	28,7500	3,99393	20,00	35,00	28,7500	28,7500	30,0000
(кр9.4)	662	35,0000	5,55119	15,00	50,00	37,2414	37,2414	37,2414
(кр9.5)	656	37,0000	5,16112	15,00	50,00	45,3750	45,3750	45,3750

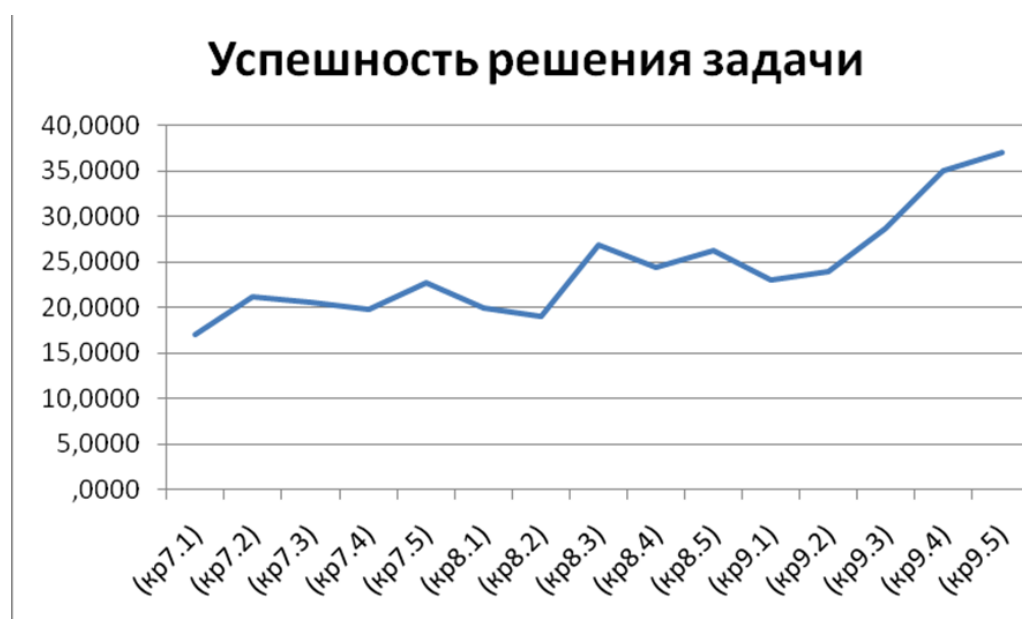


Рисунок 54.

В таблицах № 4 и №5 номера контрольных работ соответствуют следующим темам курса геометрии 7-9 классов:

К–1. Начальные геометрические сведения

К–2. Треугольник

К–3. Параллельные прямые

К–4. Соотношения между сторонами и углами треугольника

К–5. Соотношения в треугольнике. Задачи на построение

К–6. Четырехугольники

К–7. Площадь

К–8. Подобные треугольники

К–9. Применение подобия, решение прямоугольных треугольников

К–10. Окружность

К–11. Векторы

К–12. Метод координат

К–13. Соотношения между сторонами и углами треугольника.

Скалярное произведение векторов

К–14. Правильные многоугольники. Длина окружности и площадь круга

К–15. Движения.

Анализ графического представления этих распределений (см. рис. 53 и 54) позволил сформулировать две пары гипотез (табл. 34):

Таблица 34.

Номер критерия Виды гипотез	K_1	K_2
H_0	между распределениями рациональности выбора критериев убедительности, полученных в условиях разных контрольных работ, существуют лишь случайные различия	между распределениями успешности решения задачи выбранным методом, полученной в условиях разных контрольных работ, существуют лишь случайные различия
H_1	между распределениями рациональности выбора критериев убедительности, полученных в условиях разных контрольных работ, существуют неслучайные различия.	между распределениями успешности решения задачи выбранным методом, полученной в условиях разных контрольных работ, существуют неслучайные различия

Для проверки этих гипотез использовался критерий χ^2 - Фридмана, так как данный критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в трех и более условиях на одной и той же выборке испытуемых. Данный факт обусловлен тем, что единственный критерий, предназначенный для сопоставления показателей, измеренных в трех и более условиях на одной и той же выборке испытуемых, и позволяющий выявить тенденции в изменении величин при переходе от условия к условию – L-критерий тенденций Пейджа - не удовлетворяет характеру собранных данных, т.к. рассчитан на небольшую выборку ($n < 12$).

Критерий χ^2 - Фридмана соответствует собранным данным, однако предназначен для проверки более слабых гипотез (установления статистической значимости различий). Характер тенденции определяется при этом лишь из графических соображений.

В результате проведенных расчетов нами установлено, что при проверке гипотезы H_0 для критерия $K_1 \chi_r^2 = 149,3$, по таблице [108, с.328] $\chi_r^2 = 124,3$. Данные расчеты свидетельствует о том, что H_0 не принимается и выполняется гипотеза H_1 : между распределениями рациональности выбора

критериев убедительности, полученных в условиях разных контрольных работ, существуют неслучайные различия.

При проверке гипотезы H_0 для критерия K_2 $\chi_r^2 = 168,8$, по таблице [108, с.328] $\chi_r^2 = 124,3$, что свидетельствует о выполнении гипотезы H_1 : между распределениями успешности решения задачи выбранным методом, полученной в условиях разных контрольных работ, существуют неслучайные различия.

Выводы по параграфу. Результаты статистической обработки данных формирующего эксперимента показывают, что практическая реализация разработанной нами методики обучения доказательству с использованием DGS позволяет сформировать умения, связанные с проведением доказательства теорем при обучении геометрии учащихся основной школы с использованием GeoGebra, рационального выбора критериев убедительности, использования для обоснования утверждений адекватных им методов, а также успешной их реализации. Вместе с тем, следует констатировать, что выбор учащимися критерия убедительности далеко не всегда согласуется с целью соответствующего этапа обучения доказательству. Переход к использованию новых критериев происходит с некоторым запаздыванием, что объясняется консервативными свойствами мышления.

Выводы по главе 2.

Новые цели и условия обучения геометрии учащихся основной школы определяют целесообразность пересмотра традиционного подхода к обучению доказательству, который предполагал жесткую связь в решении этой образовательной задачи с дедуктивным методом.

Привлечение к процессу обучения геометрии DGS в качестве средства проведения не только разведочных, но и контрольных экспериментов создало условия для существенного расширения образовательно-значимого семантического поля термина «доказательство» за счет включения

смысловых значений, относящихся к коммуникативной деятельности, а также включения тех функций доказательства, традиционных для математической деятельности, которые не могут быть реализованы средствами компьютерного эксперимента.

С опорой на результаты анализа учебной литературы, относящейся к уровню высшего образования, нами создана семантическая модель смысловых значений термина доказательство, которые должны быть представлены учащимся и освоены ими на уровне общего образования.

Констатирующий эксперимент показал, что в содержании субъектного (доучебного) опыта учащихся также включены смысловые значения, относящиеся к термину «доказательство». В связи с этим было принято решение о реализации идеи интеграции субъектного и социокультурного опытов.

Данная идея раскрыта нами через построение методической модели поэтапного формирования умений, связанных с обучением доказательству, ориентированной на интеграцию содержания субъектного опыта учащихся, связанного с проверкой истинности утверждений с социокультурным опытом аргументации утверждений в коммуникативной деятельности и опытом доказательства утверждений в математике.

С опорой на данные психолого-педагогических исследований раскрыты механизмы интеграции субъектного опыта с социокультурным опытом при обучении геометрии учащихся основной школы, для реализации которых определены методические условия (содержательные, организационные, материально-технические).

Предложенный нами уровневый подход к обучению доказательству учащихся основной школы обеспечивает учет содержания субъектного опыта учащихся, связанного с проверкой истинности утверждений, овладение разными методами доказательства, осознание специфических функций доказательств дедуктивным методом, готовность к построению

доказательств и их оценке в коммуникативной математической деятельности.

Эти результаты достигаются поэтапно (см. табл. 35):

Таблица 35.

Уровни обучения доказательству учащихся основной школы	Роль компьютерных экспериментов в DGS и дедуктивных методов в проверке правильности утверждений
Уровень овладения эмпирическими методами проверки утверждений (7 класс, к концу изучения темы «Начальные геометрические сведения»)	Сформированы потребности в аргументации утверждений, в формулировке возражений. Контрольные компьютерные эксперименты являются основным методом проверки правильности утверждений, повышения убедительности высказанных утверждений. Применение дедуктивного метода фрагментарно.
Уровень овладения логическими методами контроля правильности алгоритма построения динамического чертежа для целей контрольного компьютерного эксперимента (к концу изучения геометрии курса 7 класса)	Контрольные компьютерные эксперименты остаются основным методом проверки правильности утверждений и повышения убедительности высказанных утверждений. Сформирована потребность в критической оценке методов и средств, использованных при обосновании истинности утверждений. Дедуктивные методы применяются, как правило, для обоснования корректности работы динамической модели, используемой в ходе компьютерного эксперимента.
Уровень овладения дедуктивным методом доказательства (к концу изучения курса геометрии 9 класса)	Учащиеся осознают ограниченность возможности контрольных компьютерных экспериментов. Дедуктивные методы являются основными для обоснования истинности утверждения. Контрольные компьютерные эксперименты выполняют вспомогательную роль, т.е. используются для предварительной проверки гипотезы. Компьютерные визуализации используются для облегчения понимания логики доказательств, проведенных дедуктивным методом.

Опытно-экспериментальная проверка разработанной методики подтвердила ее эффективность в соответствии с выдвинутой рабочей гипотезой исследования. Ее содержанием определено, что в качестве основного показателя эффективности методики нами рассматривалось наличие положительной динамики в формировании умений, связанных с проведением доказательства теорем к рациональному сочетанию различных методов обоснования геометрических утверждений.

Практическая реализация данной методики в основной школе позволит преодолеть «экспериментально-теоретический разрыв» в обучении геометрии, вызванный использованием DGS в качестве инструмента учебной деятельности.

Заключение

1. Обучение доказательству является традиционной составляющей общего геометрического образования. Это объясняется тем, что овладение доказательством позволяет раскрыть перед учащимися системологию математической науки, подготовить учащихся к критической оценке высказываемых утверждений и приводимых аргументов, а также к аргументации собственных высказываний.

2. Доказательства обладают целым набором образовательных функций, которые неравноценно представлены в содержании обучения геометрии:

- проверка истинности утверждения (verification);
- объяснение, т.е. раскрытие причин истинности утверждения (explanation);
- демонстрация дедуктивного построения геометрии (systematisation);
- открытие получением следствий (discovery);
- коммуникация, т.е. передача знаний для убеждения оппонентов в истинности (communication);
- построение эмпирической теории из отдельных фактов (construction of an empirical theory);
- исследование утверждения с целью раскрытия его смысла (exploration of the meaning of a definition or the consequences of an assumption);
- установление связей между хорошо известными фактами для переосмысления (incorporation of a well-known fact into a new framework and thus viewing it from a fresh perspective).

3. Комплексная реализация этих функций требует разнообразить методы обоснования геометрических утверждений, которые составляют традиционное содержание образования, а также включить в перечень целей обучения доказательству умения рационально использовать сочетание этих методов, т.е. применение их с учетом стилевых особенностей мышления оппонента, содержания выдвинутых альтернатив, осознания ограниченности каждого из этих методов проверки истинности утверждений.

4. Проведенный нами анализ научных данных о возрастных особенностях учащихся показывает, что обучение доказательству должно осуществляться в период 11 - 16 лет. Это объясняется тем, что потребность в поиске обоснования утверждений, высказанных оппонентом, возникает в самом начале подросткового возраста, как одно из проявлений чувства взрослости, «нежелание все принимать на веру». К началу юношеского возраста такое желание несколько уменьшается, и вместо него появляется больше доверия к чужому опыту, основанному на разумном отношении к его источнику.

5. Обучение доказательству должно осуществляться в органическом единстве с обучением исследованию, которое представляет собой различные этапы целостного гносеологического цикла.

Эту возможность предоставляют системы динамической геометрии (DGS) - это программное обеспечение, созданное для поддержки образовательной и исследовательской деятельности в области геометрии, позволяющее создавать виртуальные динамические модели геометрических объектов (динамические чертежи), т.е. выполнять построения геометрического объекта на компьютере таким образом, что при изменении одного из элементов чертежа остальные также изменяются, сохраняя заданные алгоритмом построения соотношения неизменными.

6. Системы динамической геометрии позволяют осуществлять обучение доказательству с опорой на субъектный опыт учащихся, связанный с обоснованием и критической оценкой бытовых суждений.

В содержание этого опыта у учащихся, приступающих к изучению геометрии, включены различные критерии убедительности: критерий авторитетности, критерий признанности большинством, критерий практики, критерий наглядности, критерий привлекательности, критерий логической сводимости к истинным утверждениям. Наиболее значимыми из них являются лишь два критерия: «критерий практики» и «критерий наглядности».

7. DGS позволяют проверять высказанные геометрические утверждения с использованием метода контрольного компьютерного эксперимента, апеллирующего с этими, наиболее значимыми для учащихся, критериями убедительности. Кроме того эти системы позволяют проводить конструктивные доказательства геометрических утверждений, а также создавать компьютерные визуализации доказательств.

DGS обладают богатыми возможностями и для поддержки исследовательской деятельности учащихся: проведения разведочных и модифицирующих компьютерных экспериментов разного типа. Наиболее богатыми возможностями поддержки названных видов компьютерных экспериментов, как показал проведенный нами сравнительный анализ различных DGS, обладает GeoGebra. Кроме того, данный программный продукт является свободно распространяемым, кроссплатформенным, имеет открытый программный код и переведен более, чем на 50 языков, включая русский язык.

8. Процесс обучения доказательству в основной школе с использованием DGS мы видим состоящим из трех основных уровней овладения доказательством:

I. Уровень овладения эмпирическими методами проверки утверждений: характеризуется формированием умений убеждать и убеждаться в справедливости геометрических положений с помощью компьютерного эксперимента на готовом динамическом чертеже, делать выводы из результатов эксперимента с учетом введенных параметров.

Анализ данных о психологических особенностях учащихся позволил предположить, что ориентировочным возрастным периодом для обучения на данном уровне является 11 -13 лет. Поисковый эксперимент показал, что с точки зрения построения содержания обучения геометрии, для его реализации наиболее подходит тема «Начальные геометрические сведения» [15] (7 класс, 1 четверть).

II. Уровень овладения логическими методами контроля правильности алгоритма построения динамического чертежа для целей контрольного компьютерного эксперимента характеризуется формированием умений осуществлять логический контроль правильности алгоритма построения динамического чертежа для целей контрольного компьютерного эксперимента, а также умением делать выводы об установленной области истинности утверждения с учетом полноты экспериментальных проб. Для обучения на этом уровне наиболее подходит возраст 13-14 лет. Результаты поискового эксперимента свидетельствуют, что для его реализации в содержательном плане удобны все темы курса геометрии 7 класса, начиная с темы «Треугольники» [15].

III. Уровень овладения дедуктивным методом доказательства характеризуется формированием умений логически объяснять установленный в ходе компьютерного эксперимента факт динамической устойчивости свойства геометрической конфигурации, т.е. проводить доказательства дедуктивным методом; а также использовать их для ликвидации выявленных недостатков эксперимента. Этот уровень овладения доказательством целесообразно относить к 14-16 годам и начинать его реализацию с первой темы 8 класса «Четырехугольники» [153].

Все эти уровни нами представлены не только целями, но и описанием содержания, средств, методов и форм организации учебной деятельности.

9. Экспериментальная апробация представленной методики на пилотных площадках международного проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (27 школ г. Архангельска и

Архангельской области, 676 учащихся, 42 учителя) подтвердила ее эффективность и возможность реализации в рамках исследовательского обучения математики учащихся основной школы.

Включение данной методики в технологию обучения математики с использованием DGS позволит ликвидировать экспериментально-теоретический разрыв, наметившийся в учебной практике в связи с введением данного средства.

Библиографический список:

1. Абдугалимов Г.Л. Методика формирования системы базовых знаний по геометрии с использованием компьютерных технологий как основы обучения решению задач [Текст]: дис. канд. пед. наук 13.00.02 / – Махачкала, 2004. – 163 с.
2. Анциферова А.В., Майер В.Р., «Живая геометрия» как средство развития исследовательских умений студентов в условиях индивидуально ориентированного обучения [Текст] // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2010 (2) / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2010. – 296 с.
3. Арнхейм Р. Визуальное мышление [Текст] // Зрительные образы: феноменология и эксперимент.-Душанбе, 1971.-с.58.
4. Баранова Е.И. Методика реализации компьютерного обучения геометрии в средней школе [Текст]: автореф. дисс. ... канд. пед. наук 13.00.02/ – С.-П., 1997. – 16с.
5. Башмаков М.И., Поздняков С.Н., Резник Н.А. Информационная среда обучения [Текст]/ – СПб.: Свет, 1997-с.68-83.
6. Боев В.Д., Сыпченко Р.П., Компьютерное моделирование [Текст]/ URL: <http://www.intuit.ru/department/calculate/compmodel/4/> (дата обращения: 12.06.2013).
7. Боровкова О.А., «Живая геометрия» в действии [Текст]// Математика в школе, №5, 2007 - с.44
8. Вавилов Н.А. Что доказывает математическое доказательство? [Текст]/ URL: http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=2035 (дата обращения: 24.06.2013).
9. Введение в математику: учебное пособие [Текст]/ М.В. Шабанова, С.Н. Котова, И.Н. Попов, О.Л. Безумова; Поморский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова.-Архангельск: Поморский университет, 2008.-203 с.

10. Введение в теорию алгоритмов [Текст]/ (часть 1) проф. А.В. Цыганов/ СПбГУ: 2008 / URL: http://gendocs.ru/docs/10/9264/conv_2/file2.pdf, (дата обращения: 16.06.2013).
11. Вернер А.Л., Никитин А.Б., Поздняков С.Н., Рыжик В.И., Цикин И.А. Применение методов визуализации изучаемых объектов в школьном курсе геометрии [Текст]// "Компьютерные инструменты в школе", 2008.- №4.-с.17-21.
12. Гейн А.Г. Информатика: учебн. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений [Текст] / А. Гейн, А.И. Сенокосов, Н.А. Юнерман.-3-е изд. – М.: Просвещение, 2002.-255с.
13. Гейн А.Г. Информатика: учебник для 8-9 кл. общеобр. учреждений [Текст]/ А.Г. Гейн, Е.В. Линецкий, М.В. Сапир -3-е изд.,-М.: Просвещение,1996г. -256с.
14. Геометрия,7-9 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст]/ С.А. Козлова, А.Г. Рубин, В.А. Гусев. –М. : Баласс, 2013. - 320 с. (Образовательная система «Школа 2100»).
15. Геометрия.7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст]/[Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.б. Кадомцев и др.]. – М.: Просвещение,2010.-384с.
16. Гончарова Ю.В. Классическая рациональность: античная математика [Текст]// Гуманитарные и социальные науки. - 2008.- №1. –с.67-76.
17. Горшкова А. В. Использование информационных технологий при изучении свойств круглых тел в условиях дифференцированного обучения геометрии в средней школе [Текст]: дисс. ... канд. пед. наук 13.00.02 / – Орел, 2003. – 199 с.
18. Гуреев Е.М. Динамическое моделирование в процессе обучения математике [Текст] (Новые принципы обучения, средняя школа)/ URL: http://lit.lib.ru/editors/g/gureew_e_m/text_0050.shtml, (дата обращения: 05.06.2013).

19. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике [Текст]/ –М.: ООО «Вербум-М», «Академия», 2003- 432с.
20. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения [Текст] / Рос. Акад. образования, Психологический ин-т, Междунар. Ассоциация "Развивающее обучение". — М.: ИНТОР, 1996. — 544 с.
21. Далингер В.А. Компьютерные технологии в обучении геометрии [Текст] // Информатика и образование.- 2002.- №8, с.71-77.
22. Далингер В.А. Теоретические основы когнитивно-визуального подхода в обучении математике[Текст]: Монография./ Омск: Изд-во ОмГПУ, 2006. – 144 с., илл. – 87, таб. – 17.
23. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений [Текст]/ М.:Просвещение, 2006 – 257с.
24. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики [Текст] / Под ред. М.Н. Скаткина. – М.: Просвещение, 1982. – 319с.
25. Дубровский В.А. «1С: Математический конструктор» [Текст] / Математика.- 2009.-№13.-с.1-12.
26. Дубровский В.Н., Лебедева Н.А., Белайчук О.А. 1С: Математический конструктор – новая программа динамической геометрии [Текст]// Компьютерные инструменты в образовании.- 2007.-№3.-с.47-56.
27. Дубровский В.Н., Поздняков С.Н. Динамическая геометрия в школе: Занятие 1-6. [Текст] / Компьютерные инструменты в школе. - 2008.-№1-6.
28. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Текст] // пер. с французского Дорофеев Г.В., Яглом И.М. – М.: Наука, 1972 г.-336 с.
29. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов [Электронный ресурс]/ URL: <http://school-collection.edu.ru/> (дата обращения: 25.11.2013).

30. Епишева О. Б. Специальная методика обучения геометрии в средней школе: Курс лекций [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ. – мат. спец. пед. вузов./ Тобольск: ТГПИ им. Д. И. Менделеева, 2002. – 138 с.
31. Ершов А.П. Компьютеризация школы и математическое образование. Пленарный доклад 6-му Международному конгрессу по математическому образованию [Текст] / URL: <http://ershov.iis.nsk.su/archive/eaindex.asp?lang=1&did=3444>, (дата обращения: 24.11.2013).
32. Живая математика: Сборник методических материалов [Текст]/ М.: ИНТ-176 с.
33. Зимина О.В. Проблема убедительности как философская проблема образования. [Текст] // Тезисы докладов 3-й международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посв. 85-летию Л.Д. Кудрявцева./ М.: МФТИ, 2008 – 816 с., с.447
34. Иванова А. Ю. Практическое моделирование. Компьютерный эксперимент. Методические указания для преподавателя: Учеб. пособие. – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005-112с.
35. Иванова Т.А. Методология научного поиска – основа технологии развивающего обучения [Текст]/ Математика в школе.-1995.-№5.- с.25-28.
36. Иванов С.Г., Рыжик В.И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» [Текст] / Иванов С.Г., Рыжик В.И. – М.: Просвещение, 2013. – 144 с.: ил. – (Работаем по новым стандартам).
37. Иванов С.Г. Компьютерная поддержка решения математических задач как средство организации продуктивной деятельности учащихся [Текст]: дисс. канд. пед. наук 13.00.02 / М., 2004. – 153 с.
38. Извольский Н. Методика геометрии [Текст]/ Петроград: Типография издательства Брокгаус-Ефрон, 1924.-162 с.
39. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей [Текст]/ Том 2. Геометрия./М.: 1925 г. -414с.

40. Клейн Ф. Вопросы элементарной и высшей математики [Текст]/ Т.1 – Одесса: Матезис, 1912 – 486 с.
41. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»). [Текст] / В книге: Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей, /М., 1956, с. 399-434.
42. Клопский В.М., Скопец З.А., Ягодовский М.И. Геометрия. Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы. [Текст] / 6-е изд. М., "Просвещение", 1980, с. 42.
43. Концепции развития математического образования в Российской Федерации [Текст] / URL: <http://www.math.ru/conc/vers/conc-3003.pdf>, (дата обращения: 28.08.2013).
44. Корикова Т.М., Сулова И.В., Ястребов А.В. Избранные теоремы школьной математики в деталях и нюансах [Текст] / [под ред. А.В. Ястребова]/ Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011. – 116 с.
45. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и её преподавании. [Текст] / М.: Физматлит, 2008.-434 с
46. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст] : Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др. [под ред. Е.И.Лященко]/ М.: Просвещение, 1988.-223с.
47. Лебедева С. В. Конструирование открытых заданий как средства развития интеллектуально-творческой деятельности учащихся при обучении математике [Текст] // Известия РГПУ им. А.И. Герцена.-2007.- №31.-с.197-202.
48. Лексин Н.Г. Лабораторный метод изучения геометрии. Опыт практического руководства по методике геометрии [Текст]/ Казань, 1916. – 403 с.
49. Лекторский В.А. Философия, искусственный интеллект и когнитивная наука [Текст] //Искусственный интеллект. – М., 2006г.-с.12-21.

50. Логические основы математики. 10-11 кл.: учеб. пособие [Текст] /А.Д. Гетманова. М.: Дрофа, 2005. - 253 с.
51. Люблинская И.Е., Рыжик В.И. От доказательства с использованием компьютера к компьютерному доказательству [Текст] // СПб: Компьютерные инструменты в школе, 2009. – № 1. – с. 14-20.
52. Мадер В. В. Введение в методологию математики [Текст]: (Гносеол., методол. и мировоззрен. аспекты математики. Математика и теория познания). / М. Фирма "Интерпракс" 1995. - 457 с.
53. Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий [Текст]: дис. д-ра.пед. наук 13.00.02 / Красноярск, 2001. – 351 с.
54. Майерс Д. Социальная психология: Интенсивный курс [Текст]: пер. с англ. / Д. Майерс. -- 4-е междунар. изд. - СПб.; М.:Прайм-Евразия;Олма-Пресс,2004. - 510 с. ил.
55. Макаров В.Л. Получение нового знания методом компьютерного моделирования [Текст]// Искусственный интеллект. – М., 2006г.-с.5-11.
56. Марков А. А. , Избранные труды. Т. II. Теория алгоритмов и конструктивная математика, математическая логика, информатика и смежные вопросы. [Текст] / М.: Изд-во МЦНМО, 2003.-624с.
57. Марюков М.Н. Научно-методические основы использования компьютерных технологий при изучении геометрии в школе [Текст]: дисс. ... д-ра.пед. наук 13.00.02/ Брянск, 1998. – 244 с.
58. Матиясевич Ю.В. Математическое доказательство: вчера, сегодня, завтра. Заседание Санкт-Петербургского Математического общества и Секции математики Дома учёных 23 марта 2010 года; [Электронный ресурс] / URL: http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=2036, (дата обращения: 23.11.2013 г.).
59. Метельский Н. В. Пути совершенствования обучения математике. Проблемы современной методики математики. [Текст] / Мн.: Университетское, 1989. - 160 с.

60. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений: кн. для учителя [Текст] / В.А. Далингер.- М.: Просвещение, 2006. – 256с.

61. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. 2104 «Математика» и 2105 «Физика» [Текст] / А.Я. Блох, Е.С. Канин, Н.Г. Килина и др.; / Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр.– М.: Просвещение, 1975.-336с.

62. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учебное пособие для студентов пед. ин-тов по физ-мат. спец. [Текст] / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.:/ сост. В.И. Мишин.- М. Просвещение, 1987. - 416с.

63. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов [Текст] / Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин и др.– М.: Просвещение, 1977.-480с.

64. Мехтиев М.Г. Методика обучения геометрии в 10-11 классах общеобразовательной школы с использованием компьютера [Текст]: дис. д-ра.пед. наук 13.00.02 / М., 2002. – 282 с.

65. Монахов В.М. Информационная технология обучения с точки зрения методических задач реформы школы. [Текст] // Вопросы психологии.-1988.- № 2.-с.27-36.

66. Мукалов Н. Д. Лабораторные приемы при изучении арифметики [Текст] / Киев: Изд. авт. Тип. 1-й Киев. артели печ. Дела, 1912. - 68 с.

67. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: Учебное пособие [Текст] / [Под ред. Е. И. Смирнова] / Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. -454 с.

68. Нейман Дж. фон. Математика [Текст] // Природа. – 1983. – № 2. – с. 88-95.

69. Немов Р.С. Психология [Текст]: Учеб.для студ. высш. пед. учеб. заведений: в 3 кн. — 4-е изд. /М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003. - Кн. 1: Общие основы психологии. — 688 с.

70. Немухин А.В. Компьютерный эксперимент в химии. [Текст] // Современное естествознание: Энциклопедия в 10т. – М.: Изд.дом МАГИСТР-ПРЕСС, 2000 –Т1.-Физическая химия.-328с.:илл.
71. Нуждин Г.А. Коммуникативные аспекты математической деятельности [Текст]: дисс.канд. филос.наук 09.00.08 / Москва, 1998 г.-178с.
72. Об использовании микрокалькуляторов в учебном процессе. [Текст] // Математика в школе.- 1982.- №3-с.31-35
73. Об основных критериях убедительности доказательства [Текст]/ Н.В. Белякин, Е.М. Черепанов // Философия науки. №3(46), 2010, с.31 – 44.
74. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе [Текст]/ Г.И. Саранцев.-М.: Гуманитар. Изд. Центр ВЛАДОС, 2006. - 183с.
75. Обучение геометрии с использованием интерактивной геометрической среды: дидактические материалы для 7-9 классов: методическое пособие [Текст] / [С.Н. Котова, Р.П. Овчинникова, А.Е. Томилова, и др. отв. ред. М.В. Шабанова];/ Федер. гос. ав-тоном. образоват. учреждение высш. проф. Образования «Север. (Аркт.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова».- Архангельск : КИРА, 2011. - 93с.: табл.
76. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие [Текст]/ Федер. гос. автоном. образоват. учреждение высш. проф. образования «Север. (Аркт.) федер. ун-т им. М.В.Ломоносова»; [Безумова О.Л., Овчинникова Р.П., Троицкая О.Н., Троицкий А.Г., Форкунова Л.В., Шабанова М.В., Ширикова Т.С., Томилова О.М.] – Архангельск: КИРА, 2011. -140 с.
77. Обучение математике с использованием возможностей GeoGebra [Текст] // Шабанова М.В., Безумова О.Л., Ерилова Е.Н., Котова С.Н., Ларин С.В., Овчинникова Р.П., Патронова Н.Н., Павлова М.А., Томилова А.Е., Троицкая О.Н., Форкунова Л.В., Ширикова Т.С. – М.: Издательство Перо, 2013 -128 с. (Коллективная монография).

78. Оспенникова Е.В. Методологическая функция виртуального лабораторного эксперимента [Текст] / Информатика и образование.-2002.-№11.-с.83-89.

79. Основы современного тестирования программного обеспечения, разработанного на С#, Учебное пособие [Текст] / В.П. Котляров, Т.В. Коликова; под ред. В.П. Котлярова. Санкт-Петербург, 2004, -170с.

80. Паспорт Федеральной целевой программы развития образования на 2006 - 2010 годы. Приложение №2. [Текст] / URL: <http://old.fcpro.ru/content/view/44/183>, (дата обращения: 25.11.2013).

81. Петухин В.А., Лаврищев Е.М.. Методы и средства инженерии программного обеспечения. [Текст] // Учебное пособие. Москва, 2006 г. - 304 с. [Текст] / URL: http://window.edu.ru/resource/699/41699/files/lavrishcheva_petrukhin.pdf, (дата обращения: 07.04.2013).

82. Пиаже Ж. Психология интеллекта. Избранные психологические труды. [Текст] / М., 1969.-659с.

83. Планирование обязательных результатов обучения математике [Текст] / Л.О. Денищева, Л.В. Кузнецова, И.А. Лурье и др.; Сост. В.В. Фирсов.-М.: Просвещение,1989.-237с.

84. Погорелов А.В. Геометрия [Текст]: учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений - 5-е изд. / М.: Просвещение, 2004 - 224 с.

85. Погорелов А. В. Геометрия [Текст]: учеб. для 7-11 кл. общеобраз. учреждений / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 1990. – 384 с.

86. Поддьяков А.Н. Исследовательское поведение: стратегии, познания, помощь, противодействие, конфликт. [Текст] / Эребус, 2006.-187с.

87. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения [Текст] / М., 1975, 464 с., с илл.

88. Постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 29 декабря 2010 г. N 189 г. "Об утверждении СанПиН 2.4.2.2821-10 "Санитарно-эпидемиологические требования к условиям и организации обучения в общеобразовательных учреждениях"

[Текст] / URL: "РГ" - Федеральный выпуск №5430, (дата обращения: 16 марта 2011 г.)

89. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубл. и профильным изучением математики [Текст] / Е.В. Потоскуев, Л.И. Ззавич. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004.-256с.:ил.

90. Практикум по решению математических задач [Текст]: учеб. пособие для пед. ин-тов Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова./ М.:Просвещение,1979.-240с.

91. Программа информатизации образования в Российской Федерации на 1994-1995 г.г. [Текст] // Инфо.-1993.- №6, с.8-23.

92. Пуанкаре Анри. О науке: пер. с франц. [Текст] /М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.-560с.

93. Роберт И.В. Теория и методика информатизации образования (психолого-педагогический и технологический аспекты) [Текст] / 3-е изд. - М: ИИО РАО, 2010. - 356 с.

94. Розов Н.Х. Некоторые проблемы применения компьютерных технологий и продуктов при обучении в средней школе[Текст] // Вестн. Моск. гор.пед. ун-та. Сер. Информат. и информатиз. образ.- 2003. -№ 1. -с. 102-106.

95. Розов Н.Х., Савин А.П. Лабораторные работы по геометрии? Да! [о комп. программе «Живая геометрия»] [Текст] // Математика в школе.-1994.- №6 -с.52-54.

96. Розов Н.Х., Ягола А.Г., Сергеева Т.Ф., Сербис И.Н. Наглядная планиметрия: рабочая тетрадь для 7 класса [Текст] / М., 2009.-79 с.

97. Розов Н.Х., Ягола А.Г., Сергеева Т.Ф., Сербис И.Н. Наглядная планиметрия: рабочая тетрадь для 8 класса. [Текст] / М., 2009.-75 с.

98. Розов Н.Х., Ягола А.Г., Сергеева Т.Ф., Сербис И.Н. Наглядная планиметрия: рабочая тетрадь для 9 класса. [Текст] / М., 2009.-75 с.

99. Рыжик В.И. Геометрия и компьютер [Текст] // СПб: Компьютерные инструменты в образовании, 2000. – № 6. – С. 7-11
100. Рыжик В.И. Исследовательские сюжеты для среды The Geometer's Sketchpad [Текст] / Рыжик В.И. и др. // Компьютерные инструменты в образовании. -2003.- №3.-с.14-20.
101. Рыжик В.И. Компьютер. Смена парадигмы? [Текст] / URL: http://ifets.ieee.org/russian/depositary/v13_i3/html/4r.htm, (дата обращения: 14.06.2013).
102. Садовничий В.А. О математике и ее преподавании в школе. Доклад на Всероссийском съезде учителей математики. 28 октября 2010 г. МГУ имени М.В. Ломоносова. / Москва, 2010.- с.10.
103. Сайт GeoGebra [Электронный ресурс] / URL: <http://www.geogebra.org/cms/ru/jdthtyj>, (дата обращения: 20.06.2013).
104. Сборник нормативных документов [Текст] / Сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев.- М.: Дрофа, 2004.-443с.
105. Семакин И.Г. Информатика. Базовый курс. 7-9 классы [Текст] / И.Г. Семакин, Л.А. Залогова, С.В. Русаков, Л.В. Шестакова. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. -390 с.: ил.
106. Сербис И. Н. Использование интерактивной геометрической среды при обучении школьников планиметрии [Текст] // Известия РГПУ им. А.И. Герцена 2008, -№63-2, с.176-179.
107. Серeda А.В., Баркова Т.М. Техника решения планиметрических задач [Текст]: Учебное пособие / А.В. Серeda, Т.М. Баркова. – Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2008. – 206 с.
108. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. [Текст] /СПб.: Речь, 2010. -350 с., ил.
109. Симакова Т.И. Лабораторные работы по стереометрии в VII-IX классах. [Текст] // Математика в школе, 1996, -№2 -с.60-61.

110. Система открытых задач по геометрии: 7 класс [Текст] /Д. Шноль, А. Сгибнев, Н. Нетрусова.-М.:Чистые пруды, 2009.-32с.- (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып.28).
111. Система открытых задач по геометрии: 8 класс [Текст] /Д. Шноль, А. Сгибнев, Н. Нетрусова.-М.:Чистые пруды, 2009.-32с.- (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып.29).
112. Солсо Р. Когнитивная психология. [Текст] /СПб.: Питер, 2002.- 592 с.
113. Старовиков М.И. Исследовательский учебный эксперимент по физике с компьютерной поддержкой. [Текст] / Бийск: НИЦ БПГУ, 2002.-128 с.
114. Степанова Е.В. Методика обучения планиметрии в средней школе с использованием информационных технологий [Текст]: дисс. .канд. пед. наук 13.00.02/ С.-П., 2000. – 231 с.
115. Столяр А.А. Логические проблемы преподавания математики [Текст] / Минск, Высшая школа, 1965.-254с.
116. Страбыкина Л.А. Формирование геометрических понятий в средней школе с использованием компьютера [Текст]: дисс. ... канд. пед. наук 13.0.02/ Киров, 2002. – 166 с.
117. Таранова М.В. Учебно-исследовательская деятельность как фактор повышения эффективности обучения математике учащихся профильных классов [Текст]: дис. . кандидата пед. наук 13.00.02 / Таранова Марина Владимировна, Новосибирск, 2003. - 190 с.
118. Тихомирова Ю.Е. Условия использования компьютерного сопровождения для развития обобщенных пространственных представлений при изучении геометрии [Текст]: дис. канд. пед. наук 13.00.02/ С.-П., 2004. – 206 с.
119. Учебно-методический комплекс «Электронное учебное пособие по теме: Моделирование и формализация» кафедры информатики и

дискретной математики ЕГПУ, 2006 г. [Электронный ресурс] / URL: http://umkmodel.narod.ru/newfile_43.html, (дата обращения: 12.03.2013).

120. Учебные стандарты школ России. Государственные стандарты начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования. Книга 2. Математика. Естественно-научные дисциплины [Текст] / Под ред. В.С. Леднева, Н.Д. Никандрова, М.Н. Лазутовой.- М.: «ТЦ Сфера», «Прометей», 1998.-336с.

121. ФГОС: основное общее образование [Текст] / URL: <http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2587>, (дата обращения: 24.11.2013).

122. ФГОС: среднее (полное) общее образование [Текст] / URL: <http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=6408>, (дата обращения: 24.06.2013).

123. Федеральный закон Российской Федерации от 29 декабря 2012 г. N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» [Текст] // "РГ" - Федеральный выпуск №5976, 31 декабря 2012 г.

124. Форкунова Л.В. Методика формирования исследовательской компетентности школьников в области приложений математики при взаимодействии школы и вуза [Текст]: дис. ... канд. пед. наук 13.00.02 / Орел, 2010. – 189 с.

125. Хайнд Р. Поведение животных: Синтез этологии и сравнительной психологии. [Текст] / М.: Мир, 1975.-856с.

126. Халперн Д.. Психология критического мышления [Текст]/ СПб.: Издательство «Питер», 2000.-512с.

127. Храповицкий И.С. Конфигурационный подход. [Текст] / URL: <http://janka-x.livejournal.com/tag> , (дата обращения: 12.06.2013).

128. Храповицкий И.С. Эвристический полигон для геометрии. // Компьютерные инструменты в образовании. 2003 г. -№1 – с.15-26.

129. Чудинский Р.М. К вопросу о компьютеризации учебного эксперимента. [Текст] // Наука и жизнь. Информационные технологии.- 2006.-№6. –с.69-71.

130. Шабанова М.В. Методология учебного познания как цель изучения математики [Текст] / Н.В. Чичерина / Поморский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова.— Архангельск: Помор. гос. ун-т, 2004. -402 с.

131. Шабанова М.В., Ширикова Т.С. Компьютерный эксперимент в системе методов работы с теоремой [Текст] // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 2; URL: <http://www.science-education.ru/108-9005> (дата обращения: 29.04.2013). (Журнал входит в перечень ведущих рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ)

132. Шабанова М.В., Ширикова Т.С. Обучение доказательству с использованием интерактивной геометрической среды [Текст] // Ярославский педагогический вестник. – 2012. – № 3 – Том II (Психолого –педагогические науки) - с.86-92. (Журнал входит в перечень ведущих рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ)

133. Шабанова М.В., Ерилова Е.Н., Ширикова Т.С. Компьютерный эксперимент в системе методов обучения математике. [Текст] // Математика. Образование: материалы 21-й Междунар. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш. Ун-та, 2013.- 420 с. (с.279)

134. Шабанова М.В., Ширикова Т.С. Обучение доказательству с использованием интерактивной геометрической среды. [Текст] // Математическое образование и информационное общество: проблемы и перспективы: сборник трудов XLVIII Всероссийской (с международным участием) конференции. 18-21 апреля 2012 г. / под общ. ред. Е.И. Саниной. – М.: РУДН, 2012.-421с. (с.96-107).

135. Шабат Г.Б. «Живая Математика» и математический эксперимент [Текст] // Вопросы образования. – 2005. – Вып. 4. – С. 156-165

136. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9кл. [Текст] / 2-е изд.-М.:Дрофа, 1998.-352с.

137. Шарыгин И.Ф. Рассуждения о концепции школьной геометрии [Текст]/М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 2000.-56с.

138. Шашков В.Б. Компьютерная модель эксперимента [Текст] / Вестник Оренбургского Государственного университета.-2007.- №1.-с.157-161.

139. Ширикова Т.С. Проблема сближения содержания школьного курса математики с передовыми рубежами науки [Текст] // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Сер. Гуманитарные и социальные науки. - 2012. - № 3. - С.141-145. - Библиогр. в примеч. - (Педагогика. Психология). (Журнал входит в перечень ведущих рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ)

140. Ширикова Т.С. Виды компьютерного эксперимента и их использование в обучении математике. [Текст] // Инновационные процессы в современной школе: методология, теория и практика: Сб. ст. Междунар. заочной научн.-практ. конф., посвященной 75-летию ТГПУ им. Л.Н. Толстого (24 апр. 2013 г.) / Под общ. ред. С.В. Митрохиной.- Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2013.-207 с.(с.183).

141. Ширикова Т.С. Методические особенности обучения геометрии учащихся вечерней школы с использованием ИГС. [Текст] // Труды X международных Колмогоровских чтений: сборник статей.- Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2012 – 305с. (с.131).

142. Ширикова Т.С. Особенности «компьютерных доказательств» геометрических утверждений. [Текст] // Труды IX международных Колмогоровских чтений: сборник статей.- Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011 – 324с. (с.217).

143. Ширикова Т.С. Методические особенности обучения геометрии учащихся вечерней школы с использованием ИГС. [Текст] // Информатизация как целевая ориентация и стратегический ресурс образования: сборник научных трудов участников Международной научно-

практической конференции, 29 февраля-4 марта 2012 / НМС по мат. М-ва образования и науки РФ, Ин-т информатизации образования РАО, Сев. (Аркт.) федер. ун-т им М.В. Ломоносова, Ин-т мат. и информат. Болгар. Акад. Наук, Акад. Социал. упр. – Архангельск: КИРА, 2012. -552 с. (с.455-461).

144. Шовен Р. Поведение животных. [Текст] / М.: Мир, 1972.-490с.

145. Шуман Х. Интерактивное конструирование в виртуальном пространстве с помощью Cabri 3D . Часть 1. [Текст] / Предметное обучение. Компьютерные инструменты в образовании. 2006, №1, с.47-53.

146. Шуман Х. Интерактивное конструирование в виртуальном пространстве с помощью Cabri 3D . Часть 2. [Текст] / Предметное обучение. Компьютерные инструменты в образовании. 2006, №2, с.42-51.

147. Шуман Х. Исследование аналогий с помощью Cabri 3D на примере пары треугольник - тетраэдр. [Текст] / Компьютерные инструменты в образовании. 2005, №4, с.35-42.

148. Шуман Х. Компьютерный метод исследования функциональных зависимостей в геометрических фигурах. [Текст] / Компьютерные инструменты в образовании. 2001, №2, с.68-74.

149. Энциклопедический Словарь Ф.А.Брокгауза и И.А.Ефрона. / [Текст] / URL: <http://www.vehi.net/brokgauz/> (дата обращения:23.02.2014).

150. Юдин Ю.Ю., Степанов В.Д., Демонстрация на видеотерминале ПЭВМ подвижных геометрических чертежей. [Текст] / Тезисы докладов научно-методической конференции. Использование вычислительной техники в учебном процессе. Владимирский ГПУ им. П.И. Лебедева-Полянского, Владимир, 1990.- 56с.

151. Якиманская И.С. Основы личностно ориентированного образования: монография [Текст] / И. С. Якиманская. – М.: Бином, 2011.-220с.

152. Ястребов А.В. Дуалистические свойства математики и их отражение в процессе преподавания [Текст] / А.В. Ястребов. // Ярославский педагогический вестник. — 2001. — № 1. — с.48- 53.

153. Ястребов А.В. Дуалистические свойства математики как источник педагогических сценариев [Текст]// Математика. Образование: материалы 19-й Международной конф. Двухязычное (билингвальное) обучение в системе общего и высшего профессионального образования: материалы 2-го Международного симп. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. Ун-та, 2011. –с.282-290

154. Common Core Standards. Mathematics: Appendix A, 2010 <http://www.corestandards.org/the-standards> (проверено 12.06.2013).

155. Constantinos Christou, Nikos Mousoulides, Marios Pittalis and Demetra Pitta-Panzani. Proofs through exploration in dynamic geometry environments. International Journal of Science and Mathematics Education (2004). University of Cyprus // Departament of Educational Sciences. Cyprus/Nicozia, 2004. P. 339-352, p. 339-344. © NationalScienceCouncil, Taiwan, 2004.

156. Department for Education and Employment: 1999, The National Curriculum for England: Mathematics. London: DfEEandQCA

157. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. Educational Studies in Mathematics, 44: 5–23, 2000. © 2001 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands

158. Hanna, G. and Jahnke, H.N.: 1996, ‘Proof and proving’, in A. Bishop, K. Clements, C.Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.), International Handbook of Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp 877–908.

159. Hanna, G. Beyond verification: Proof can teach new methods. Ontario Institute for Studies in Education/ University of Toronto, 2008

160. Jackiw, N.: 1991, The geometer’s sketchpad (computer software), Key Curriculum Press,Berkeley, CA.

161. Marrades R., Gutierrez A. Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment / Educational

Studies in Mathematics 44: 87-125, 2000. © 2001 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

162. Mariotti, A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In Gutiérrez, A. & Boero, P. (Eds.). Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future, (pp. 173-204). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

163. Mason, J.: 1991, 'Questions about geometry', in D. Pimm and E. Love (eds.), Teaching and Learning Mathematics: A Reader, Holder and Stoughton, London, pp. 77–99.

164. Mc. Kernan, J. Curriculum Action Research. A Handbook of Methods and Resources for the Reflective Practitioner. Second Edition. Kogan Page Limited, 120 Pentonville Road, London N1 9JN England, United Kingdom, 1996.- p.278

165. Méray Charles, Nouveaux Eléments de Géométrie, Savy, Paris 1874; nouvelle édition, Jobard, Dijon 1903

166. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics

167. R. Leikin & D. Grossman Teachers modify geometry problems: from proof to investigation. # Springer Science+Business Media Dordrecht, 2012, c.515-531 (Published online: 5 January 2013)

168. Rav, Y.: 1999, 'Why do we prove theorems?', *Philosophia Mathematica* 7(3), 5–41.

169. Syer, H. W. (1945) Making and using motion pictures for the teaching of mathematics. In W. D. Reeve (Ed.), Multi-sensory aids in the teaching of mathematics (pp. 325-345). New York, NY: Bureau of Publications, Teachers College

170. Teaching and learning geometry 11-19. Report of a Royal Society / Joint Mathematical Council working group. URL:

http://royalsociety.org/uploadedFiles/Royal_Society_Content/policy/publications/2001/9992.pdf, (дата обращения: 25.11.2013).

171. Villiers, M.: 1999, Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad, Key Curriculum Press, Emeryville, CA.

Приложение

Система задач для обучения доказательству геометрических утверждений с использованием GeoGebra в основной школе

7 класс

Глава 1. **Начальные геометрические сведения** (Уровень овладения эмпирическими методами проверки утверждений.)

Задание 1. (Утверждение «Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну» [15, с.5])

В GeoGebra постройте динамическую модель, иллюстрирующую утверждение «Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну». Проверьте его справедливость для случая совпадения точек. Опишите свои действия и наблюдения. Сделайте вывод, о том можно ли провести в GeoGebra прямые через две совпадающие точки и сколько таких прямых можно провести?

Дидактическая функция задачи: на демонстрацию и описание способов использования динамических чертежей для проверки утверждений.

Задание 2. (Утверждение «Две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек.» [15, с.6])

Учитель с помощью динамической модели в GeoGebra решил показать учащимся, что справедливо утверждение «Две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек». Один из учащихся, просмотрев эту демонстрацию, сказал: «Все это не убедительно. Если мы не видим общей точки прямых на экране, то это не значит, что ее нет». Придумайте, как с помощью этой же модели можно убедить этого ученика в справедливости утверждения.

Дидактическая функция задачи: на проверку соответствия способа проведения контрольного эксперимента характеру сомнений.

Задание 3. (Утверждение «Когда точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков» [15, с.15])

Ученик проводил эксперимент для проверки утверждения «Когда точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков». Он действовал так.

- 1) Построил динамическую модель: провел отрезок АВ и построил точку С на нем, измерил все получившиеся отрезки.
- 2) В ходе эксперимента он менял положение точки С на отрезке АВ, изменял длину АВ, увеличивая точность измерения.

В ходе эксперимента он столкнулся с явлением, которое представлено на рисунке1:

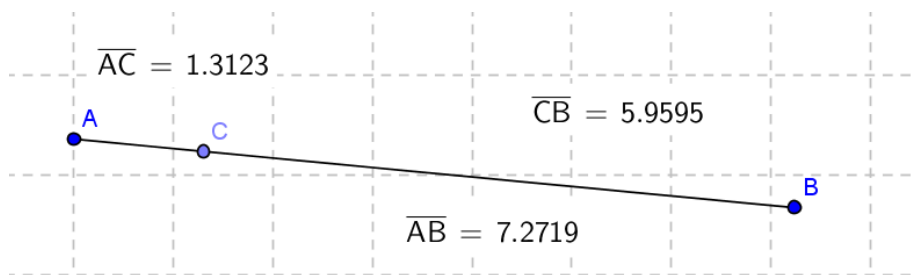


Рисунок 1

Какой вывод должен сделать ученик по результатам эксперимента?

Дидактические функции задачи: на проверку достаточности экспериментальной проверки для установления истинности утверждения.

Дополнительные задачи на формирование умений правильно объяснять экспериментальные данные.

4. Пользуясь заготовкой динамического чертежа (рис.2), определите, как изменять имеющиеся параметры (ползунки), чтобы убедиться в справедливости геометрического утверждения «Когда луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов» [15, с.19].

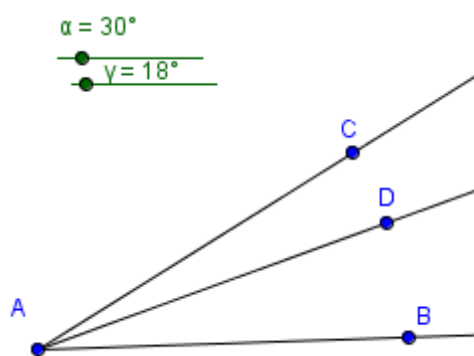


Рисунок 2

Результаты эксперимента оформите в виде таблицы (см. табл. 1) и сделайте **ВЫВОД**.

Таблица 1

	$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$			$90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$		
$0^\circ \leq \gamma \leq \alpha$	$\angle BAD + \angle CAD \square \angle ABC$	$\angle BAD + \angle CAD \square \angle ABC$	$\angle BAD + \angle CAD \square \angle ABC$	$\angle BAD + \angle CAD \square \angle ABC$	$\angle BAD + \angle CAD \square \angle ABC$	$\angle BAD + \angle CAD \square \angle ABC$

Вывод: _____

5. Придумать способ наглядной демонстрации средствами GeoGebra справедливости геометрического утверждения «Сумма смежных углов равна 180° » [15, с.22].

Установить соответствие между выводами, представленными в столбце 2 и описанием экспериментов, представленных в столбце 1 (табл.2).

Таблица 2

Эксперимент	Вывод
1.Смежные углы дополняют друг друга до прямой. Значит ...	Угол принимает значение 180° , но не исключено, что он не может принимать и другое значение.
2.Измеряя величины разных углов, я вижу, что все они попадают в промежуток от 0° до 180° . Значит ...	Угол всегда принимает значения из промежутка от 0° до 180° , но возможно, не все.
3. Величина построенного угла пробегает все значения от 0° до 180° . Значит...	Угол может принимать любые значения из промежутка от 0° до 180° , и только их.
4. Величина, задающая взаимное расположение сторон угла, может быть любой, например, пробегать значения от 0° до 180° (и более). Но измерения показывают, что каждой из них величина угол остается в пределах от 0° до 180° . Значит...	Угол может принимать любые значения из интервала от 0° до 180° и только их.

Задание 6 (Утверждение «Вертикальные углы равны» [15, с.22]).

По заданному алгоритму постройте в GeoGebra динамическую модель вертикальных углов.

- 1) Введите параметр α , величину одного из вертикальных углов
- 2) Постройте прямую АВ
- 3) Постройте угол $\angle BAB' = \alpha$
- 4) Постройте прямую АВ'

Придумайте и проведите с помощью этой модели эксперимент, подтверждающий справедливость геометрического утверждения о равенстве вертикальных углов.

Дидактическая функция задачи: формирование умений планировать и проводить эксперимент в зависимости от характера альтернатив.

Задание 7 (Утверждение «Две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, не пересекаются» [15, с.23]). Спланируйте компьютерный эксперимент, позволяющий выбрать из представленных ниже утверждений, верное:

- 1) Две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, имеют общую точку.
- 2) Две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, не пересекаются.

Дидактическая функция задачи: формирование умений планировать и проводить эксперимент в зависимости от характера альтернатив.

8. ([33, №70] Через точку А, не лежащую на прямой a , проведены три прямые, пересекающие прямую a . Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой a).

Проведите эксперимент, позволяющий выбрать из представленных ниже утверждений верное:

- 1) Через А можно провести две прямые, перпендикулярные к прямой a .
- 2) Через А можно провести только одну прямую, перпендикулярную к прямой a .
- 3) Ни одна из трех прямых не может быть перпендикулярна к прямой a .

Дидактическая функция задачи: формирование умений планировать и проводить эксперимент в зависимости от характера альтернатив.

9. ([15, №79] Точки A , B и C лежат на одной прямой, точки M и N – середины отрезков AB и AC . Докажите, что $BC=2MN$).

На отрезке AB на расстоянии b от точки A отмечена точка C . Точки M и N – середины отрезков AB и AC соответственно. Проведите эксперимент, позволяющий выбрать из представленных ниже утверждений верное:

- 1) Длина отрезка MN зависит / не зависит от длины отрезка BC .
- 2) Длина отрезка MN зависит / не зависит от положения точки C на отрезке BC .

Дидактическая функция задачи: формирование умений планировать и проводить эксперимент в зависимости от характера альтернатив.

10. ([15, №84] Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой).

Некий ученик построил в системе координат биссектрисы I и III координатных углов и увидел, что они составляют одну прямую. Потом выполнил те же построения для II и IV координатных углов. Опираясь на результаты этих двух построений, стал утверждать: «Биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой». Справедливо ли это утверждение? Спланируйте и проведите эксперимент, позволяющие развеять или подкрепить ваши сомнения в справедливости этого утверждения.

Дидактическая функция задачи: формирование умений формулировать альтернативы и планировать контрольный эксперимент в зависимости от характера альтернатив.

Дополнительные задачи на формирование умений планировать и проводить эксперимент в зависимости от характера альтернатив.

11. ([15, №85] Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A , B и D лежат на одной прямой).

BM и BN -биссектрисы углов ABC и CBD . С помощью компьютерного эксперимента, проверьте утверждения:

- 1) Точки A , B и D лежат на одной прямой при любом значении угла MBN .
- 2) A , B и D лежат на одной прямой при условии равенства угла MBN 90° .

12. ([15, №86] Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A , не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n , так что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые m и n не совпадают).

Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A , не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n , так что $m \perp a$, $n \perp b$. С помощью компьютерного эксперимента, проверьте утверждения:

- 1) При любом значении угла между прямыми a и b , прямые m и n образуют угол меньше / больше 180° .
- 2) При любом значении угла между прямыми a и b , прямые m и n образуют угол равный 180° .

Задание 13. Подтвердите примерами или опровергните справедливость утверждения-теоремы Бойяи-Гервина: Любой многоугольник можно так разрезать на части, что из этих частей удастся сложить квадрат. Отметим, что для равностороннего треугольника достаточно четырёх частей (рис.3).

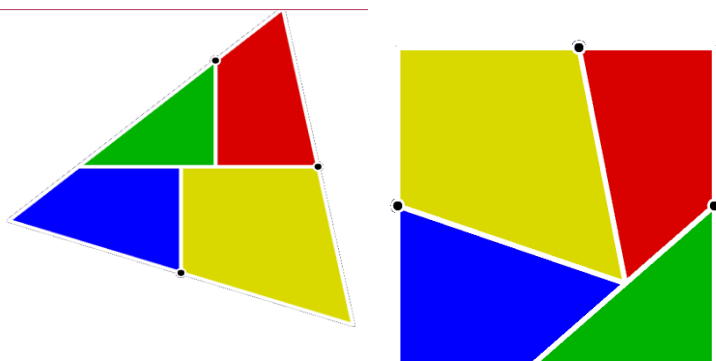


Рисунок 3

Задание 14. На диске⁸ просмотрите компьютерную визуализацию Теоремы Наполеона (рис.4). Сформулируйте эту теорему. (Ответ: Центры равносторонних треугольников равноудалены друг от друга).

⁸<http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/5d640440-abb8-8aef-f03d-ce6d561d07d2/37042/?interface=themcol>

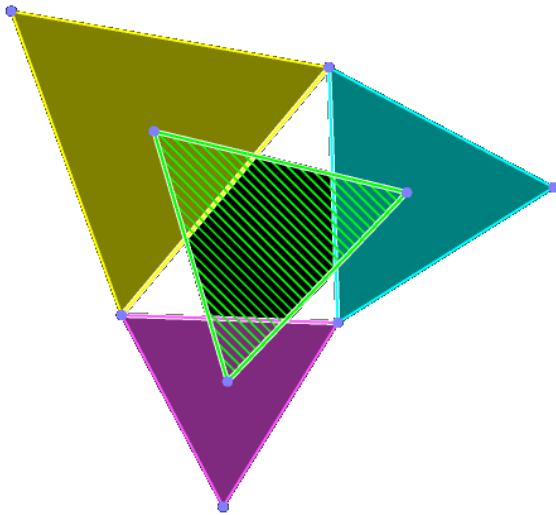


Рисунок 4

Глава 2. **Треугольники** (Уровень овладения логическими методами контроля корректности технических средств, применяемых в ходе компьютерного эксперимента.)

Задание 1. Утверждение «Если два треугольника равны, то элементы (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника» [15, с.29].

Учащимся 7 класса учитель предложил динамический чертеж (рис.5), на котором были изображены два треугольника.

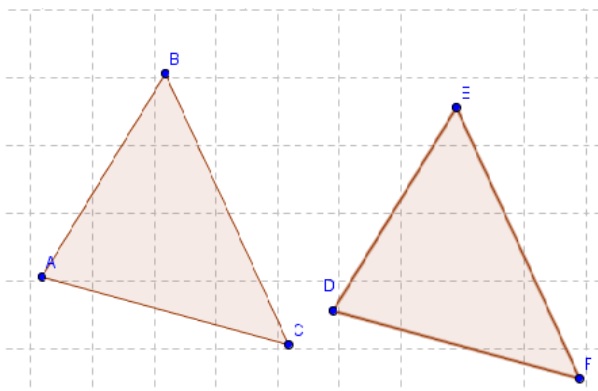


Рисунок 5

Придумайте, каким способом можно проверить, равны ли данные треугольники или нет. На использовании какого утверждения основан предложенный вами способ.

-Если два треугольника равны, то элементы (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.

-В равных треугольниках против соответственно равных сторон (т. е. совмещающихся при наложении) лежат равные углы, и обратно: против соответственно равных углов лежат равные стороны.

Дидактические функции задачи: задача на формирование умения теоретически обосновывать способ компьютерной проверки утверждения.

Задание 2. Утверждение «Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны» [15, с.30]

Просмотрите на диске *Наглядная планиметрия, 7 класс* [96] построение треугольников по двум сторонам и углу между ними:

Выполните задания 1-3 диска и сформулируйте первый признак равенства треугольников.

Методические указания: учащимся при проверке можно использовать как определение равных треугольников, так и критерий.

Дидактические функции задачи: задача на формирование умения теоретически обосновывать способ компьютерной проверки утверждения.

3. ([15, №93] Отрезки AE и DC пересекаются в точке B , являющейся серединой каждого из них. Докажите, что треугольники ABC и EBD равны).

Для компьютерной проверки равенства треугольников ABC и EBD , образованных отрезками AE и DC с общей серединой B , один ученик построил чертеж в GeoGebra по алгоритму 1, а второй учащийся - по алгоритму 2 (см.табл.3). Не выполняя построений, выясните, какой из алгоритмов правильный. Объясните, почему?

Таблица 3

Алгоритм 1	Алгоритм 2
Отрезок AE	Отрезок AE
Отрезок CD	B – середина AB
Точка B , середина AE	Отрезок BD , прямая BD
Точка B' , середина CD	Отрезок $BC=BD$, $C \in$ прямой BD
$B=B'$	$\triangle ABC$, $\triangle EBD$
$\triangle ABC$, $\triangle EBD$	

Дидактические функции задачи: формирование представления о правильном чертеже, как динамически устойчивом.

4. ([15, №94] На рисунке 5 AB и AC равны, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольники ABD и ACD равны).

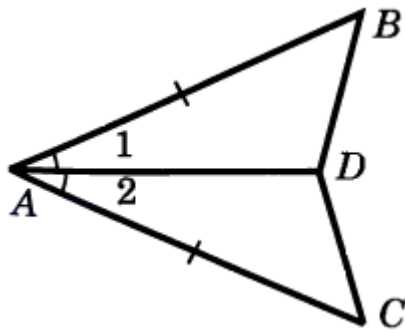


Рисунок 5

Для компьютерной проверки равенства треугольников, представленных на рисунке 5, придумайте несколько алгоритмов построения динамического чертежа. Обоснуйте правильность этих алгоритмов.

Дидактические функции задачи: задача на формирование умения теоретически обосновывать динамическую устойчивость чертежа.

5. ([15, №95] На рисунке 6 $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольники ABC и CDA равны).

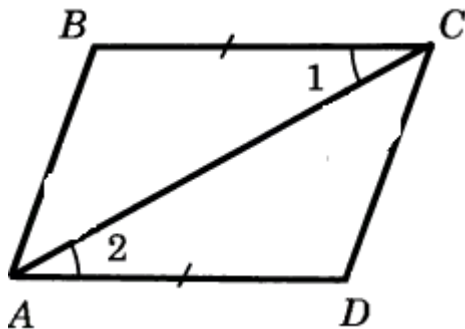


Рисунок 6

Треугольники ABC и CDA построены по следующему алгоритму (см. табл.4):

Таблица 4

Входные объекты	Выходные объекты
Параметр a	Отрезок AD
Параметр α	Угол $\angle DAC'$
Точка $C \in$ лучу AC'	Отрезок AC
Параметр α	Угол $\angle ACB' = \angle DAC'$
Параметр a , точка $B \in$ лучу CB'	Отрезок $CB = AD$
Точка B' , середина CD	Отрезок $BC = BD$
Точки A, B, C, D	Четырехугольник ABCD

Объясните, почему изменения положения вершин А, В и С не нарушают равенства этих треугольников?

Дидактические функции задачи: формирование умения использовать дидактические утверждения для формирования умения теоретически обосновывать динамическую устойчивость чертежа.

Дополнительные задачи на формирование умения строить динамически устойчивый чертеж и обосновывать правильность построения.

6. ([15, №96] На рисунке 7 $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74^\circ$, $\angle 2 = 36^\circ$. Докажите, что треугольники AOB и DOC равны).

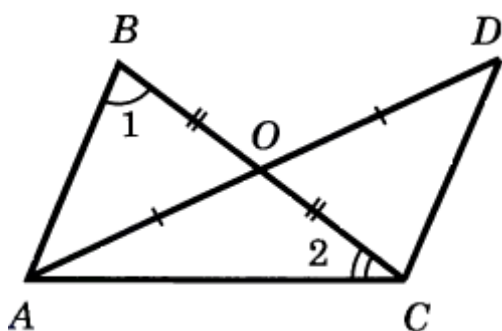


Рисунок 7

7. ([15, №97] Отрезки AC и BD точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что треугольники ABC и CDA равны).

8. ([15, №98] В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$).

9. ([15, №99] На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC , а точка E – на отрезке AD , причем $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$).

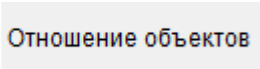
Задание 10. (Утверждение «Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один» [15, с.32]).

По заданному алгоритму построения динамического чертежа, определите, какое утверждение требуется доказать:

- 1) Прямая a , точка $A \notin a$
- 2) $AB \perp a$

$$3) AC \perp a$$

$$4) AB \equiv AC$$

Методические указания: учащимся при проверке можно использовать средства GeoGebra, инструмент  .

Дидактические функции задачи: формирование умения формулировать утверждения по заданному алгоритму построения динамического чертежа.

Задание 11. (Утверждение «В любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке»[15, с.34]).

Методом разведочного компьютерного эксперимента установлено, что в любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке. Придумайте алгоритм построения треугольника, позволяющий проверить справедливость этих свойств для остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников.

Дидактические функции задачи: формирование умения определять характеристический набор элементов (набор параметров), от величины которых зависит вывод.

Методические указания: решение данной задачи предполагает использование учащимися знаний и умений, связанных с построением треугольника с помощью циркуля и линейки.

Задание 12. (Утверждение «В любом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке»[15, с.34]).

Методом разведочного компьютерного эксперимента установлено, что в любом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке. Придумайте алгоритм построения треугольника, позволяющий проверить справедливость этих свойств для остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников.

Дидактические функции задачи: формирование умения определять характеристический набор элементов (набор параметров), от величины которых зависит вывод.

Методические указания: решение данной задачи предполагает использование учащимися знаний и умений, связанных с построением треугольника с помощью циркуля и линейки.

Задание 13. (Утверждение «В любом треугольнике высоты или их продолжения пересекаются в одной точке» [15, с34]).

Методом разведочного компьютерного эксперимента установлено, что в любом треугольнике высоты или их продолжения пересекаются в одной точке. Придумайте алгоритм построения треугольника, позволяющий проверить справедливость этих свойств для остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников.

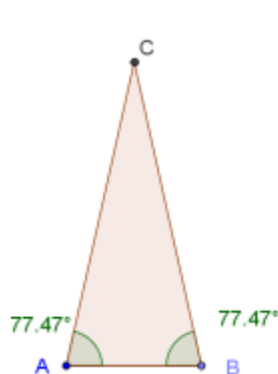
Дидактические функции задачи: формирование умения определять характеристический набор элементов (набор параметров), от величины которых зависит вывод.

Методические указания: решение данной задачи предполагает использование учащимися знаний и умений, связанных с построением треугольника с помощью циркуля и линейки.

Задание 14. (Утверждение «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны» [15, с.35]).

Методом компьютерного эксперимента установите, какие из гипотез верны (рис.8):

- 1) Равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит / не зависит от выбора длины основания.
- 2) Равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит / не зависит от выбора длины боковой стороны.
- 3) Равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит / не зависит от соотношения длины основания к длине боковой стороны.



Методом компьютерного эксперимента установите, какие из гипотез верны:

1. Равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит/не зависит от выбора длины основания.
2. Равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит/ не зависит от выбора длины боковой стороны;
3. Равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит/не зависит от соотношения длины основания к длине боковой сторон

Рисунок 8

Дидактические функции задачи: задача на формирование умения теоретически обосновывать способ компьютерной проверки утверждения.

Задание 15. (Утверждение «В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой» [15, с.35]).

Проведите компьютерный эксперимент. При построении динамического чертежа воспользуйтесь определением равнобедренного треугольника. Обоснуйте шаги построения (табл.5):

Таблица 5

Входные (посылка)	объекты	Выходной (заключение)	объект	Обоснование
a, b		Треугольник ABC		Определение равнобедренного треугольника
$\angle A$		Биссектриса $\angle A$		Определение биссектрисы угла
Биссектриса $\angle A$		$\triangle ANC = \triangle ANB$		Признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.
$\triangle ANC = \triangle ANB$		$NC = NB$		Вывод: AN – медиана по определению медианы треугольника
$\triangle ANC = \triangle ANB$		$\angle ANC = \angle ANB = 90^\circ$		Вывод: AN – высота по определению высоты треугольника

Дидактические функции задачи: задача на формирование умения теоретически обосновывать шаги построения.

Задание 16. (Утверждение «Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой» [15, с.36]).

Учащиеся 7 класса для доказательства утверждения «Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой» провели компьютерный эксперимент и заполнили таблицу (см.табл. 6). Найдите допущенные ими ошибки при обосновании шагов построения.

Таблица 6

Входные (посылка)	объекты	Выходной (заключение)	объект	Обоснование
a, b		Треугольник ABC		Определение равнобедренного треугольника
$AN \perp BC$		Высота AN		Определение медианы
Высота AN		$\triangle ANC = \triangle ANB$		Признак равенства треугольников по трем сторонам.
$\triangle ANC = \triangle ANB$		$NC = NB$		Вывод: AN – медиана по определению медианы треугольника
$\triangle ANC = \triangle ANB$		$\angle C = \angle B$		Вывод: AN – биссектриса по определению биссектрисы угла

Дидактические функции задачи: формирование умения обосновывать шаги построения.

Задание 17. (Утверждение «Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой» [15, с.36]).

Постройте динамический чертеж для проведения компьютерного эксперимента, обоснуйте правильность алгоритма построения, заполнив таблицу:

Таблица 7

Входные (посылка)	объекты	Выходной (заключение)	объект	Обоснование
----------------------	---------	--------------------------	--------	-------------

Дидактические функции задачи: формирование умения разрабатывать алгоритм построения динамического чертежа и обосновывать шаги построения.

18. ([15, №105] Точки А и С лежат по одну сторону от прямой a . Перпендикуляры АВ и CD к прямой a равны. Докажите, что $\angle ABD = \angle CDB$).

Выясните, какие параметры необходимо ввести для построения динамического чертежа, если мы хотим выяснить, зависит ли равенство треугольников от длины перпендикуляров. Заполните пропуски в таблице:

Таблица 8

Входные (посылка)	Выходной (заключение)	Обоснование
В, D	Прямая a	Аксиома существования прямой
А, прямая a	$AB \perp a$	Определение перпендикуляра к прямой
А, параметр b	Окружность (А; b)	Определение окружности
АВ, окружность (А; b)	Точка В - пересечения	Взаимное расположение прямой и окружности
В, прямая a	$CD \perp a$	Определение перпендикуляра к прямой
В, параметр b	Окружность (В; b)	Определение окружности
CD, окружность (В; b)	Точка D - пересечения	Взаимное расположение прямой и окружности
Точки А, В, D	$\triangle ABD$	Определение треугольника
Точки С, D, В	$\triangle CDB$	Определение треугольника
$\triangle ABD$ и $\triangle CDB$	$AB = CD$	$AB = CD = b$ по построению
$\triangle ABD$ и $\triangle CDB$	$\angle B = \angle D = 90^\circ$	$AB \perp a$, $CD \perp a$ по построению
$\triangle ABD$ и $\triangle CDB$	BD - общая	по построению
$\triangle ABD$ и $\triangle CDB$	$\triangle ABD = \triangle CDB$	Признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними

Дидактические функции задачи: задача на формирование умения определять характеристический набор элементов (набор параметров, от величины которых зависит вывод), на формирование умения восстанавливать алгоритм построения и его обоснование.

19. ([15, №106] Медиана AD треугольника ABC продолжена за сторону BC на отрезок DE, равный AD, и точка E соединена с точкой C. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ECD$).

Можно ли, не проводя компьютерного эксперимента, установить к появлению каких пар равных треугольников ведет заданный алгоритм. Обоснуйте шаги построения и свои выводы.

Таблица 9

Входные (посылка) объекты	Выходной (заключение) объект	Обоснование
A, B, C	Треугольник ABC	Определение треугольника
BC	D – середина отрезка BC	Определение середины отрезка
A и D	Прямая AD	Аксиома существования прямой
D, отрезок AD, прямая AD	DC= DE, DE∈прямой AD	Аксиома откладывания отрезков
Точки E, C	EC	Аксиома откладывания отрезков

Дидактические функции задачи: на формирование умения обосновывать не только алгоритм построения динамического чертежа, но и свойства, которыми он обладает.

20. ([15, №110] Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его высотой, то треугольник равнобедренный).

Проведите компьютерный эксперимент. Заполните пропуски в таблице:

Таблица 10

Входные (посылка) объекты	Выходной (заключение) объект	Обоснование
$\triangle ABD$ и $\triangle CBD$	$AD = DC$	По определению медианы треугольника
$\triangle ABD$ и $\triangle CBD$	$\angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$	По определению высоты треугольника
$\triangle ABD$ и $\triangle CBD$	DB –общая	По построению
$\triangle ABD$ и $\triangle CBD$	$\triangle ABD = \triangle CBD$	Признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними

Дидактические функции задачи: на формирование умения обосновывать шаги построения.

21. ([15, №111] На рисунке 9 $CD = BD$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный).

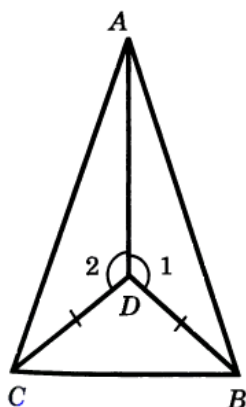


Рисунок 9

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по заданной задаче, пользуясь заготовкой:

1. Прямая m , $B \in m$
2. Окружность $(B; a)$, где a – любое число
3. $D \in$ окружности $(B; a)$
4. Параметр $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$
5. $\angle BDC' = \alpha$
6. Окружность $(D; a)$, где a – любое число
7. C – точка пересечения луча DC' и окружности $(D; a)$
8. $\triangle DBC$
9. $\angle BDA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$
10. Отрезок AD
11. $\triangle ABC$

Объясните равенство $\triangle ADC = \triangle BDC$. Сделайте вывод о равенстве / неравенстве сторон AC и AB .

Дидактические функции задачи: на формирование умения делать выводы и формулировать цель эксперимента.

Дополнительные задачи на формирование умения определять характеристический набор элементов в зависимости от цели, обосновывать шаги построения и делать выводы.

22. ([15, №113] Точки M и P лежат по одну сторону от прямой b . Перпендикуляры MN и PQ , проведенные к прямой b , равны. Точка O — середина отрезка NQ . Докажите, что $\triangle OMP = \triangle OPM$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №113. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

23. ([15, №114] Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны).

По имеющемуся динамическому чертежу, проверьте утверждение «В равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны».

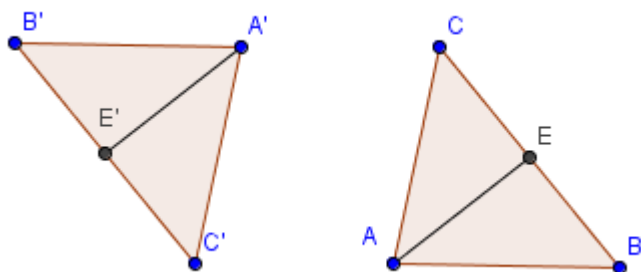


Рисунок 10

Обоснуйте равенство треугольников ABE и $A'B'E'$. Сделайте вывод о равенстве медиан треугольников.

24. ([15, №115] Медиана AM треугольника ABC равна отрезку BM . Докажите, что один из углов треугольника ABC равен сумме двух других углов).

Постройте динамический чертеж к задаче №115, воспользовавшись при построении теоремой о свойстве углов равнобедренного треугольника.

25. ([15, №116] Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны).

Придумать способ наглядной демонстрации средствами GeoGebra справедливости геометрического утверждения «Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны». Определите параметры (характеристический набор элементов) при построении динамического элемента, составьте алгоритм построения, обоснуйте шаги построения алгоритма, сделайте вывод.

26. ([15, №117] На рисунке 11 $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что $\angle BAC = \angle CED$).

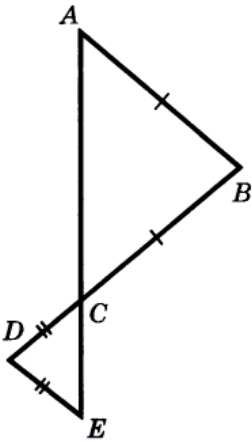


Рисунок 11

Докажите, что при условии $AB = BC$, $CD = DE$ треугольники $\triangle BAC$ и $\triangle CED$ могут быть равными.

27. ([15, №118] На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM=CN$. Докажите, что а) $\triangle BAM = \triangle CAN$; б) треугольник AMN равнобедренный).

Укажите, какая теорема лежит в основе заданного алгоритма построения.

Таблица 11

Входные (посылка)	объекты	Выходной (заключение)	объект	Обоснование
a, b		$\triangle ABC$		Определение равнобедренного треугольника
c		Отрезки $BM=CN$		Аксиома откладывания отрезка
$\triangle ABM$ и $\triangle CAN$		$AB = AC$		По определению равнобедренного треугольника
$\triangle ABM$ и $\triangle CAN$		$BM=CN$		По построению
$\triangle ABM$ и $\triangle CAN$		$\angle B = \angle C$		По свойству углов равнобедренного треугольника
$\triangle ABM$ и $\triangle CAN$		$\triangle ABM = \triangle CAN$		Признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними
$AM=AN$		$\triangle AMN$ равнобедренный		Определение равнобедренного треугольника

28. ([15, №120] В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD . На сторонах AB и CB отмечены соответственно точки E и F так, что $AE = CF$. Докажите, что: а) $\triangle BDE = \triangle BDF$; б) $\triangle ADE = \triangle CDF$).

По заданному алгоритму построения, сформулируйте теорему.

Таблица 12

Входные (посылка)	объекты	Выходной (заключение)	объект	Обоснование
a, b		$\triangle ABC$		Определение равнобедренного треугольника
c		Отрезки $AE = CF$		Аксиома откладывания отрезка
B, AC		BD - медиана		Определение медианы треугольника
$\triangle EBD$ и $\triangle FBD$		$EB = FB$		По определению равнобедренного треугольника $AB = BC$, по построению $AE = CF$.
$\triangle EBD$ и $\triangle FBD$		BD - общая		По построению
$\triangle EBD$ и $\triangle FBD$		$\angle ABD = \angle CBD$		По свойству медианы равнобедренного треугольника быть биссектрисой угла
$\triangle EBD$ и $\triangle FBD$		$\triangle EBD = \triangle FBD$		Признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними
$\triangle EBD = \triangle FBD$		$ED = FD$		$\triangle EBD = \triangle FBD$
$\triangle EAD$ и $\triangle FCD$		$\angle A = \angle C$		По свойству углов равнобедренного треугольника
$\triangle EAD$ и $\triangle FCD$		$AE = CF$		По построению
$\triangle EAD$ и $\triangle FCD$		$\triangle EAD = \triangle FCD$		Признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними

Задание 29. (Утверждение «Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны» [15, с.38]).

Просмотрите на диске *Наглядная планиметрия, 7 класс* [96] построение треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам:

Выполните задания 1-3 диска и сформулируйте второй признак равенства треугольников.

Методические указания: учащимся при проверке можно использовать как определение равных треугольников, так и критерий.

Дидактические функции задачи: задача на формирование умения теоретически обосновывать способ компьютерной проверки утверждения.

Задание 30. (Утверждение «Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны» [15, с.39]).

Просмотрите на диске *Наглядная планиметрия, 7 класс* [96] построение треугольников по трем сторонам:

Выполните задания 1-3 диска и сформулируйте третий признак равенства треугольников.

Методические указания: учащимся при проверке можно использовать как определение равных треугольников, так и критерий.

Дидактические функции задачи: задача на формирование умения теоретически обосновывать способ компьютерной проверки утверждения.

Дополнительные задачи на формирование умения теоретически обосновывать способ компьютерной проверки утверждения.

31. ([15, №121] Отрезки АВ и CD пересекаются в середине О отрезка АВ, $\angle OAD = \angle OBC$. Докажите, что $\triangle CBO = \triangle DAO$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №121. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

32. ([15, №122] На рисунке 12 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$).

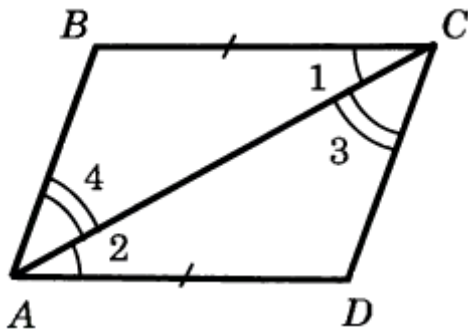


Рисунок 12

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №122. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

33. ([15, №123] На биссектрисе угла A взята точка D , а на сторонах этого угла— точки B и C такие, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №123. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

34. ([15, №124] По данным рисунка 13 докажите, что $OP = OT$, $\angle P = \angle T$).

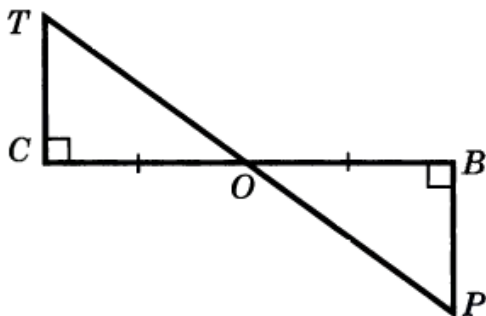


Рисунок 13

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №124. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

35. ([15, №125] На рисунке 14 $\angle DAC = \angle DBC$, $AO = BO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$).

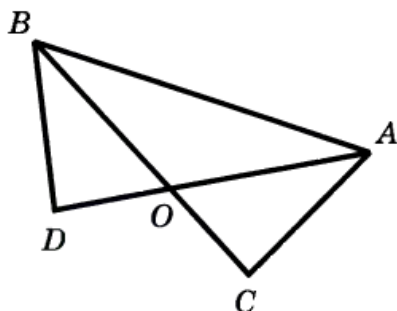


Рисунок 14

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №125. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

36. ([15, №127] В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №127. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

37. ([15, №128] Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведенные к соответственно равным сторонам, равны).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №128. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

38. ([15, №129] Отрезки AC и BD пересекаются в середине O отрезка AC , $\angle BCO = \angle DAO$. Докажите, что $\triangle BOA = \triangle DOC$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №129. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

39. ([15, №130] В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки CO и C_1O_1 — медианы, $BC=B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Докажите, что: а) $\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$; б) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №130. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

40. ([15, №131] В треугольниках DEF и PEF $MN = NP$, $DF = MP$ и $\angle F = \angle P$. Биссектрисы углов E и D пересекаются в точке O , а биссектрисы углов M и N — в точке K . Докажите, что $\angle DOE = \angle MKN$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №131. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

41. ([15, №132] Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A , пересекает стороны угла в точках M и N . Докажите, что треугольник AMN — равнобедренный).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №132. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

42. ([15, №133] Докажите, что если биссектриса треугольника совпадает с его высотой, то треугольник — равнобедренный).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №133. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

43. ([15, №134] Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №134. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

44. ([15, №135] Докажите, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то треугольники равны).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №135. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

45. ([15, №137] На рисунке 15 $BC = AD$, $AB = CD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$).

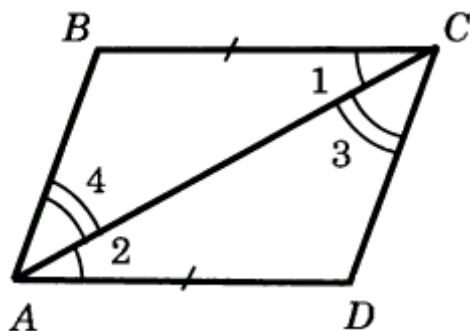


Рисунок 15

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №137. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

46. ([15, №138] На рисунке 16 $AB = CD$ и $BD = AC$. Докажите, что: а) $\angle CAD = \angle ADB$; б) $\angle BAC = \angle CDB$).

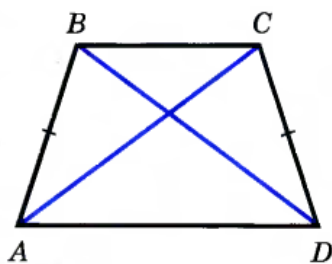


Рисунок 16

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №138. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

47. ([15, №139] На рисунке 17 $AB = CD$, $AD = BC$, BE — биссектриса угла ABC , а DF — биссектриса угла ADC . Докажите, что: а) $\angle ABE = \angle ADF$; б) $\triangle ABE = \triangle CDF$).

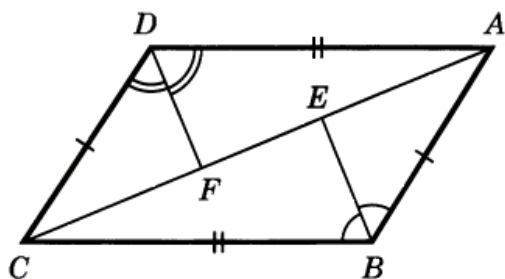


Рисунок 17

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №139. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

48. ([15, №140] В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы BM и B_1M_1 равны, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №140. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

49. ([15, №141] В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ и $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №141. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

50. ([15, №142] Равнобедренные треугольники ADC и BCD имеют общее основание DC . Прямая AB пересекает отрезок CD в точке O . Докажите, что: а) $\angle ADB = \angle ACB$; б) $DO = OC$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №142. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

51. ([15, №159] Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и угол, противолежащий основанию, одного треугольника соответственно равны боковой стороне и углу, противолежащему основанию, другого треугольника).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №159. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

52. ([15, №160] Прямая a проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к нему. Докажите, что: а) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B ; б) каждая точка, равноудаленная от точек A и B , лежит на прямой a .)

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №160. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

53. ([15, №161] В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы AM и A_1M_1 равны, $BC=B_1C_1$ и $\angle AMB=\angle A_1M_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №161. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

54. ([15, №162] На рисунке 18 треугольник ADE равнобедренный, DE — основание. Докажите, что: а) если $BD=CE$, то $\angle CAD=\angle BAE$ и $AB=AC$; б) если $\angle CAD=\angle BAE$, то $BD=CE$ и $AB=AC$).

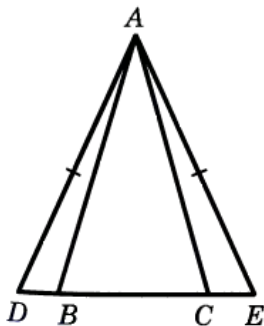


Рисунок 18

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №162. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

55. ([15, №163] Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника). Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №163. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

56. ([15, №164] На сторонах равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки AD , BE и CF , как показано на рисунке 19. Точки D , E , F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний). Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №164. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

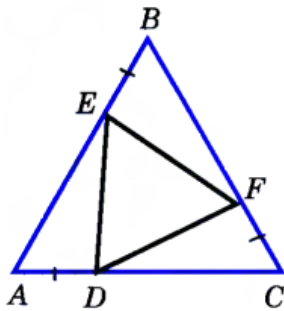


Рисунок 19

57. ([15, №165] Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O . На отрезках AC и BD отмечены точки K и K_1 так, что $AK = BK_1$. Докажите, что:
а) $OK = OK_1$ б) точка O лежит на прямой KK_1).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №165. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

58. ([15, №166] Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O . Точки M и N — середины отрезков AC и BD . Докажите, что точка O — середина отрезка MN).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №166. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

59. ([15, №167] Стороны равностороннего треугольника ABC продолжены, как показано на рисунке 20, на равные отрезки AD , CE , BF . Докажите, что треугольник DEF — равносторонний).

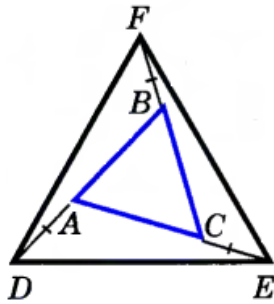


Рисунок 20

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №167. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

60. ([15, №169] На рисунке 21 $OC=OD$, $OB=OE$. Докажите, что $AB=EF$. Объясните способ измерения ширины озера (отрезка AB на рисунке), основанный на этой задаче).

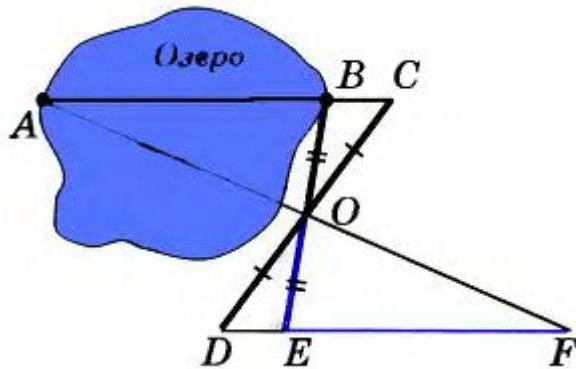


Рисунок 21

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №169. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

61. ([15, №170] Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB=A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AD=A_1D_1$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №170. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

62. ([15, №171] В треугольниках ABC и ADC стороны BC и AD равны и пересекаются в точке O , $\angle OAC = \angle OCA$. Докажите, что треугольники ABO и CDO равны).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №171. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

63. ([15, №172] На рисунке 22 $AC=AD$, $AB \perp CD$. Докажите, что $BC=BD$ и $\angle ACB = \angle ADB$).

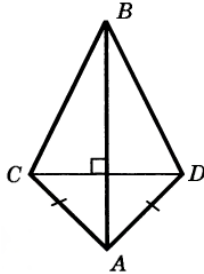


Рисунок 22

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №172. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

64. ([15, №173*] Докажите, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №173. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

65. ([15, №174*] Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №174. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

66. ([15, №175*] На сторонах угла $ХОУ$ отмечены точки A, B, C и D так, что $OA=OB$, $AC=BD$ (рис.23). Прямые AD и BC пересекаются в точке E . Докажите, что луч OE — биссектриса угла $ХОУ$. Опишите способ построения биссектрисы угла, основанный на этом факте).

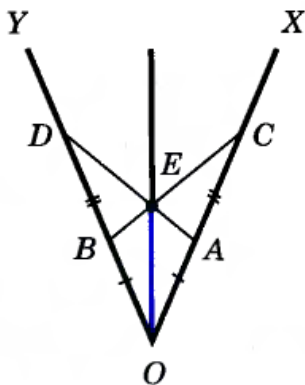


Рисунок 23

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №175. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

67. ([15, №176*] Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №176. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

68. ([15, №177*] Даны два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки K и L , а на сторонах A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ — точки K_1 и L_1 так, что $AK = A_1K_1$, $LC = L_1C_1$. Докажите, что: а) $KL = K_1L_1$; б) $AL = A_1L_1$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №177. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

69. ([15, №178*] Даны три точки A , B , C , лежащие на одной прямой, и точка D , не лежащая на этой прямой. Докажите, что по крайней мере два из трех отрезков AD , BD и CD не равны друг другу).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №178. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

70. ([15, №179*] На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle PXB = \angle QXC$, где X — середина основания BC . Докажите, что $BQ = CP$).

Составьте алгоритм построения динамического чертежа по задаче №179. Сделайте вывод в соответствии с условием задачи.

8 класс

Глава 5. **Четырехугольники** (Уровень овладения дедуктивным методом доказательства).

Задание 1. (Утверждение «Сумма углов выпуклого n -угольника равна $(n - 2)180^\circ$ » [15, с.99])

Постройте в GeoGebra произвольный выпуклый пятиугольник. Найдите сумму его углов по следующему алгоритму:

1 способ (вычисления, основанные на знании суммы углов треугольника):

1. Разделите его диагоналями на треугольники так, чтобы диагонали не пересекались друг с другом.
2. Посчитайте количество получившихся треугольников. Сравните их число с числом вершин многоугольника.
3. Вычислите сумму углов выпуклого пятиугольника, зная, чему равна сумма углов треугольника.

2 способ (компьютерное вычисление):

1. Измерьте градусную меру каждого угла выпуклого пятиугольника.
2. Найдите с помощью строки ввода сумму углов выпуклого пятиугольника.

Результатам какого способа вычисления суммы углов выпуклого пятиугольника можно доверять?

Обобщите выводы для получения формулы суммы углов выпуклого n -угольника.

Методические указания: При компьютерном вычислении, возникает ошибка в связи с тем, что программа выводит на экран результат, исключаящий число, кратное 2π .

Дидактические функции задачи: на формирование умения критического отношения к результатам компьютерного эксперимента.

Задание 2. (Утверждение «В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны» [15, с.101]).

Выполните задания с диска *Наглядная планиметрия, 8* (свойство 1 и 2)
 [97]. Сформулируйте свойство параллелограмма, запишите его в виде
 «Если__ (посылка), то__ (заключение)».

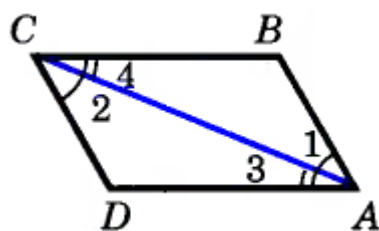


Рисунок 24

Пользуясь компьютерной визуализацией (рис.25) , заполните пропуски
 в указанном плане доказательства:

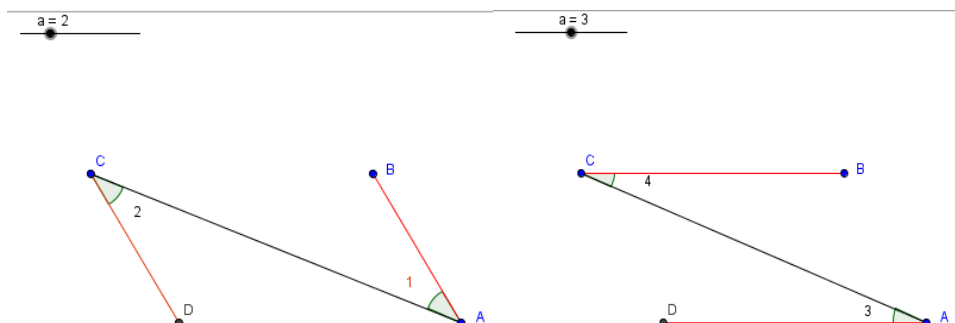


Рисунок 25

- 1) $\angle 1 = \angle 2$, т.к. ____
- 2) $\angle 3 = \angle 4$, т.к. ____
- 3) AC – общая,
- 4) $\triangle ACD = \triangle ACB$ по _____ признаку равенства треугольников.
- 5) $CD = AB$, $DA = BC$, т.к. ____
- 6) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, т.к. ____

Дидактические функции задачи: на формирование умения переосмысливать элементы чертежа в ходе доказательства.

Задание 3. (Утверждение «Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам» [15, с.101]).

Выполните задания с диска *Наглядная планиметрия, 8* (свойство 3) [97].
Сформулируйте свойство параллелограмма, запишите его в виде
«Если__ (посылка), то__ (заключение)».

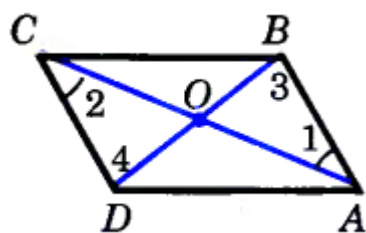


Рисунок 26

Проведите доказательство по плану:

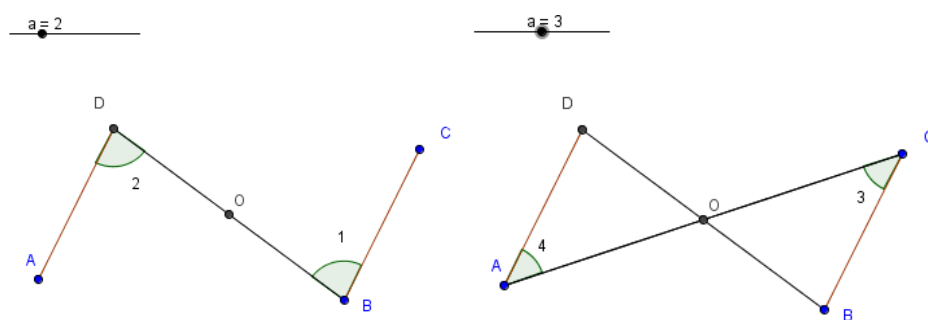


Рисунок 27

- 1) $\angle 1 = \angle 2$, т.к. ____
- 2) $\angle 3 = \angle 4$, т.к. ____
- 3) $CD = AB$, по свойству 1, как противоположные стороны параллелограмма,
- 4) $\triangle AOB = \triangle COD$ по _____ признаку равенства треугольников.
- 5) $AO = CO$, $BO = DO$, т.к. ____.

Дидактические функции задачи: на формирование умения формулировать цель эксперимента, дедуктивно обосновывать шаги доказательства.

Задание 4. (Утверждение «Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм» [15, с.102]).

Выполните задания с диска *Наглядная планиметрия, 8* (задание 3) [97].
Сформулируйте признак параллелограмма, запишите его в виде
«Если__ (посылка), то__ (заключение)».

Постройте в GeoGebra динамический чертеж четырехугольника ABCD, удовлетворяющего условию (посылке) теоремы. Придумайте способ отметить на чертеже отрезки, которые по построению являются равными и параллельными. Экспериментально проверьте, является ли полученная фигура параллелограммом. Проведите доказательство по следующему плану:

- 1) Докажите равенство углов, образованных параллельными прямыми и секущей (диагональю четырехугольника).
- 2) Докажите равенство треугольников, на которые разбивает данный четырехугольник его диагональ.
- 3) Докажите параллельность двух других сторон четырехугольника.
- 4) Сделайте вывод о виде четырехугольника.

Дидактические функции задачи: на формирование умения проводить доказательство по заданному плану.

Задание 5. (Утверждение «Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник—параллелограмм» [15, с.102]).

Выполните задания с диска *Наглядная планиметрия*, 8 (задание 4) [97].

Сформулируйте признак параллелограмма, запишите его в виде «Если__ (посылка), то __ (заключение)».

Проведите доказательство по плану:

- 1) Докажите равенство треугольников, на которые разбивает данный четырехугольник его диагональ.
- 2) Докажите параллельность прямых, содержащих стороны четырехугольника.
- 3) Сделайте вывод о виде четырехугольника.

Дидактические функции задачи: на формирование умения проводить доказательство по заданному плану.

Задание 6. (Утверждение «Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм» [15, с.103]).

Выполните задания с диска *Наглядная планиметрия*, 8 класс (задание 5) [97].
Сформулируйте признак параллелограмма, запишите его в виде «Если__ (посылка), то__ (заключение)».

Проведите доказательство по плану.

- 1) Докажите равенство углов, образованных при пересечении диагоналей четырехугольника.
- 2) Докажите равенство треугольников, на которые разбивают данный четырехугольник его диагонали.
- 3) Докажите параллельность прямых, содержащих стороны четырехугольника.
- 4) Сделайте вывод о виде четырехугольника.

Дидактические функции задачи: на формирование умения проводить доказательство по заданному плану.

7. ([15, №371] Докажите, что выпуклый четырехугольник ABCD является параллелограммом, если: а) $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$).

Постройте в GeoGebra динамический чертеж четырехугольника ABCD, обладающего следующими свойствами: а) $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Определите его вид. Докажите, что вид четырехугольника не изменится от величины углов, его задающих.
Проведите доказательство по следующему плану:

а)

- 1) Докажите, что стороны AB и CD четырехугольника параллельны.
- 2) Докажите, что стороны AD и BC четырехугольника параллельны.
- 3) Сделайте вывод о виде четырехугольника ABCD.

б)

- 1) Докажите равенство углов, образованных диагональю AC и $AB \parallel CD$.
- 2) Докажите равенство треугольников ACD и ABC.
- 3) Докажите параллельность сторон AD и BC.
- 4) Сделайте вывод о виде четырехугольника ABCD.

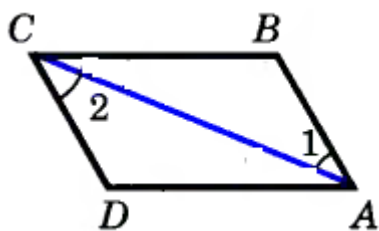


Рисунок 28

Методические указания: Работа с задачей должна завершаться постановкой перед учащимися вопроса: «На основании какого утверждения (определения параллелограмма, 1-3 признаков параллелограмма, свойств параллелограмма) будете делать вывод о том, является ли ABCD параллелограммом?»

Дидактические функции задачи: на формирование умения проводить доказательство по заданному плану, на формирование умения выбирать теоретическую основу доказательства из перечня сходных по содержанию утверждений.

8. ([15, №378] Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырехугольником).

Ознакомьтесь с образцом решения задачи «Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырехугольником». Какое свойство параллелограмма является основой доказательства?

Исследуйте, пользуясь динамической моделью в GeoGebra, сохраняется ли свойство выпуклости у четырехугольников, в которых только две стороны параллельны. Обоснуйте сформулированную гипотезу.

Дидактические функции задачи: на формирование умения обобщать доказанное утверждение.

9. ([15, №379] Из вершин B и D параллелограмма ABCD, у которого $AB \neq BC$ и угол A острый, проведены перпендикуляры BK и DM к прямой AC. Докажите, что четырехугольник BMDK — параллелограмм).

Из вершин B и D параллелограмма ABCD, у которого $AB \neq BC$ и угол A острый, проведены перпендикуляры BK и DM к прямой AC. Исследуйте вопрос о том, является ли четырехугольник BMDK — параллелограммом? При каком условии четырехугольник BMDK не существует?

Дидактические функции задачи: на формирование умения проводить исследование.

Дополнительные задачи на формирование умения дедуктивно обосновывать шаги доказательства.

10. ([15, №380] На сторонах AB , BC , CD и DA четырехугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M , N , P и Q так, что $AM=CP$, $BN=DQ$, $BM=DP$, $NC=QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы).

На сторонах AB , BC , CD и DA четырехугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M , N , P и Q так, что $AM=CP$, $BN=DQ$, $BM=DP$, $NC=QA$. Исследуйте вопрос о том, являются ли четырехугольники $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммами? При каком условии четырехугольник $MNPQ$ не существует? Обоснуйте сформулированную гипотезу.

11. ([15, №381] На рисунке 29 изображены два одинаковых колеса тепловоза. Радиусы O_1A и O_2B равны. Стержень AB , длина которого равна расстоянию O_1O_2 между центрами колес, передает движение от одного колеса к другому. Докажите, что отрезки AB и O_1O_2 либо параллельны, либо лежат на одной прямой).

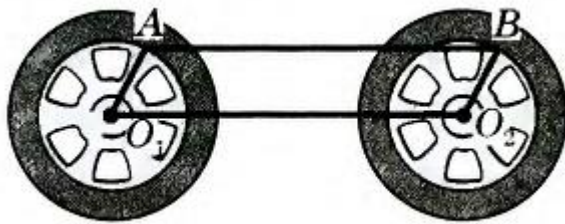


Рисунок 29

На рисунке изображены два одинаковых колеса тепловоза. Радиусы O_1A и O_2B равны. Стержень AB , длина которого равна расстоянию O_1O_2 между центрами колес, передает движение от одного колеса к другому.

Исследуйте вопрос о том, является ли четырехугольник ABO_1O_2 — параллелограммом? При каком условии четырехугольник ABO_1O_2 не существует? Обоснуйте сформулированную гипотезу.

12. ([15, №382] Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины отрезков OA , OB , OC и OD , — параллелограмм).

Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . A_1 , B_1 , C_1 , D_1 — середины отрезков OA , OB , OC и OD . Исследуйте вопрос о том, является ли четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммом? Обоснуйте сформулированную гипотезу.

13. ([15, №383] На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены две точки P и Q так, что $PB=QD$. Докажите, что четырехугольник $APCQ$ — параллелограмм).

На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены две точки P и Q так, что $PB=QD$. Исследуйте вопрос о том, является ли четырехугольник $APCQ$ — параллелограммом? При каком условии четырехугольник $APCQ$ существует? Обоснуйте сформулированную гипотезу.

14. ([15, №384] Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC . Эта прямая пересекает сторону AC в точке N . Докажите, что $AN=NC$).

Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC . Эта прямая пересекает сторону AC в точке N . Исследуйте вопрос о том, в каком отношении делится точкой N сторона AC треугольника ABC ? Обоснуйте сформулированную гипотезу.

15. ([15, №385] Докажите теорему Фалеса: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки).

На одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую. Эти прямые отсекут на второй прямой отрезки. Исследуйте вопрос о том, в каком отношении будут находиться эти отрезки. Обоснуйте сформулированную гипотезу.

16. ([15, №386] Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции).

Исследуйте вопрос о том, как будет расположен отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, по отношению к основаниям трапеции. Обоснуйте сформулированную гипотезу.

17. ([15, №388] Докажите, что в равнобедренной трапеции: а) углы при каждом основании равны; б) диагонали равны).

Исследуйте вопрос о том, равны / не равны углы при каждом основании равнобедренной трапеции; равны / не равны диагонали равнобедренной трапеции. Обоснуйте сформулированные гипотезы. Сохраняется ли хотя бы одно из этих свойств для прямоугольной трапеции, для неравнобедренной трапеции.

18. ([15, №389] Докажите, что трапеция равнобедренная, если: а) углы при основании равны; б) диагонали трапеции равны).

Докажите, что трапеция равнобедренная, если: а) углы при основании равны; б) диагонали трапеции равны. Исследуйте вопрос о том, как изменится результат этой задачи, если объектом исследования будет не только трапеция, а любые четырехугольники?

19. ([15, №391] Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренной трапеции, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости).

Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренной трапеции, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости. Исследуйте вопрос о том, какими свойствами должна обладать доска, чтобы из неё можно было сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

Глава 6. Площадь.

Задание 1.(Утверждение «Равные многоугольники имеют равные площади» [15, с.119])

Придумайте и проведите эксперимент, подтверждающий свойство площадей:
Равные многоугольники имеют равные площади.

Дидактические функции задачи: на формирование умения экспериментально подтверждать аксиому о свойствах площадей.

Задание 2.(Утверждение «Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников» [15, с.119])

Сформулируйте свойство площадей, представленное анимацией (рис.30):

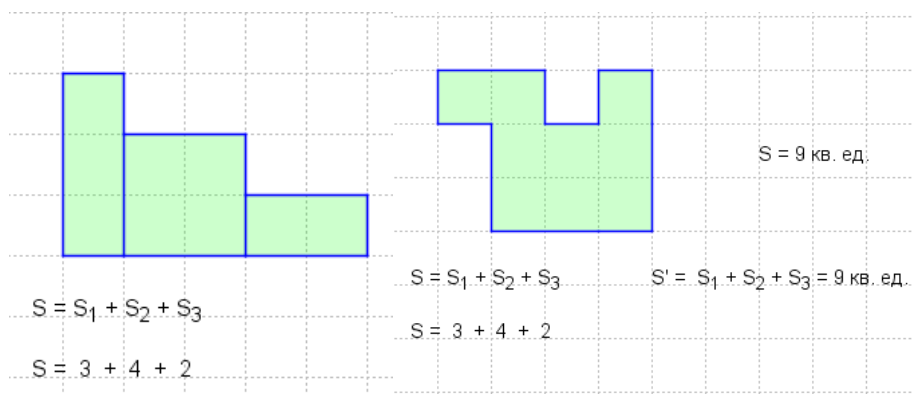


Рисунок 30

Дидактические функции задачи: на формирование умения формулировать утверждение о свойствах площадей по его компьютерной визуализации.

Задание 3. (Утверждение «Площадь квадрата равна квадрату его стороны» [15, с.119]).

Продемонстрируйте с помощью GeoGebra, что если длина стороны квадрата выражена натуральным числом или рациональной дробью, то площадь его может быть выражена через сумму площадей квадратов сетки графического окна.

Методические указания: При нахождении площади квадрата учащимся необходимо пользоваться инструментами *увеличить*, *уменьшить*, которые меняют размеры ячеек сетки.

Дидактические функции задачи: на формирование умения создавать компьютерную визуализацию утверждения.

Задание 4. (Утверждение «Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон» [15, с.122])

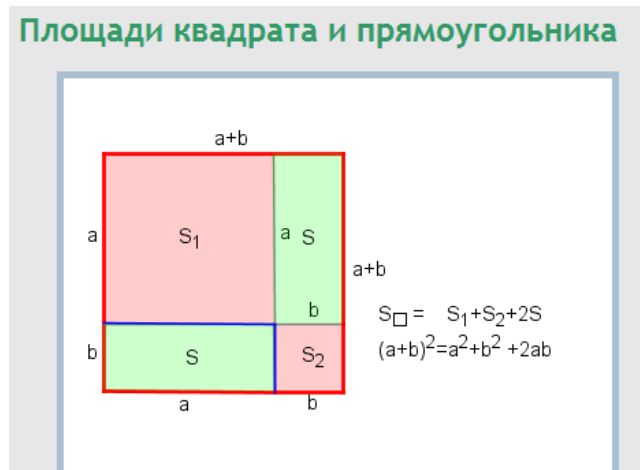


Рисунок 31

На диске *Наглядная планиметрия, 8 класс* [97] просмотрите компьютерную визуализацию доказательства теоремы о площади прямоугольника. Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

Дидактические функции задачи: на формирование умения выделять основную идею доказательства и восстанавливать ход доказательства по компьютерной визуализации.

Задание 5. (Утверждение «Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту» [15, с.124])

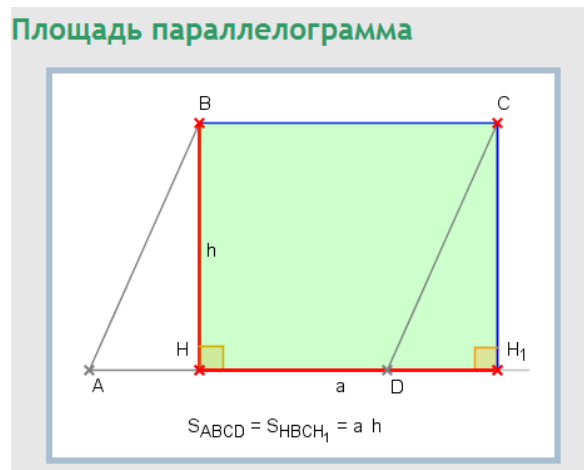


Рисунок 32

На диске *Наглядная планиметрия, 8класс* [97] просмотрите компьютерную визуализацию доказательства теоремы о площади параллелограмма. Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

Дидактические функции задачи: на формирование умения выделять основную идею доказательства и восстанавливать ход доказательства по компьютерной визуализации.

Задание 6. (Утверждение «Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту» [15, с.125]).

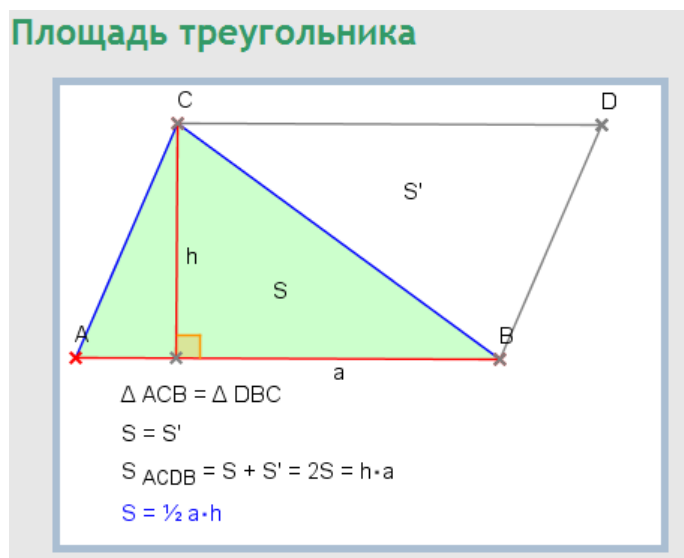


Рисунок 33

На диске *Наглядная планиметрия, 8класс* [97] просмотрите компьютерную визуализацию доказательства теоремы о площади прямоугольника. Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

Дидактические функции задачи: на формирование умения выделять основную идею доказательства и восстанавливать ход доказательства по компьютерной визуализации.

Задание 7. (Утверждение «Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов» [15, с.125]).

Создайте в GeoGebra компьютерную визуализацию теоремы о площади прямоугольного треугольника. Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

Дидактические функции задачи: на формирование умения самостоятельно выстраивать доказательство, основанное на идее равновеликости равносторонних фигур, формирование умения визуализировать дедуктивные рассуждения.

Дополнительные задачи на формирование умения визуализировать дедуктивные рассуждения.

Задание 8. (Утверждение «Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания» [15, с.125]).

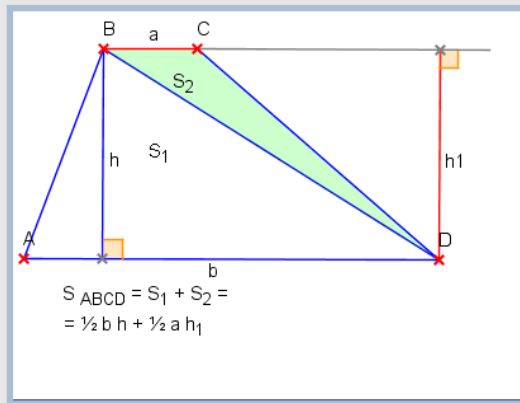
Создайте в GeoGebra компьютерную визуализацию утверждения «Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания». Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

Задание 9.(Утверждение «Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы» [15, с.126]).

Создайте в GeoGebra компьютерную визуализацию утверждения «Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы». Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

Задание 10.(Утверждение «Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту» [15, с.127]).

Площадь трапеции



Площадь трапеции

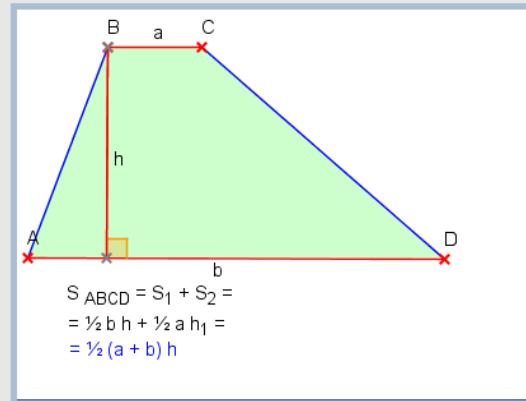


Рисунок 34

На диске *Наглядная планиметрия, 8класс* [97] просмотрите компьютерную визуализацию доказательства теоремы о площади трапеции. Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

Дидактические функции задачи: на формирование умения выделять основную идею доказательства и восстанавливать ход доказательства по компьютерной визуализации.

Дополнительные задачи на формирование умения выделять основную идею доказательства и восстанавливать ход доказательства по компьютерной визуализации.

11. ([15, №447] Начертите параллелограмм ABCD и отметьте точку M, симметричную точке D относительно точки C. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.)

По представленной визуализации (рис.35) прокомментируйте доказательство. Разбейте на шаги и обоснуйте их.

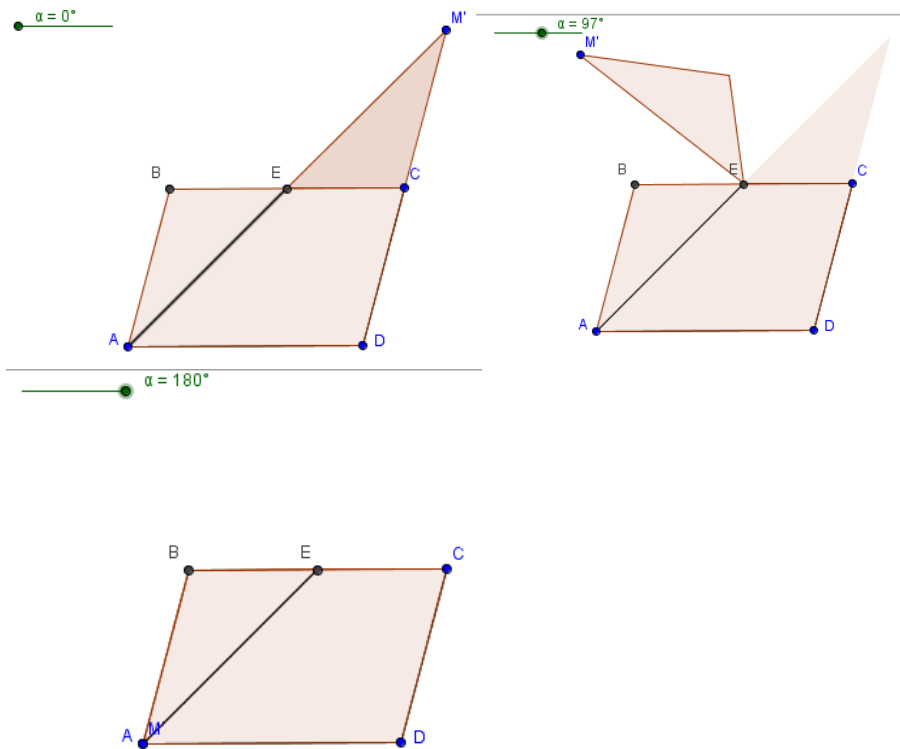


Рисунок 35

12. ([15, №448] На стороне AD прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N , причем точка M — середина отрезка AE . Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.)

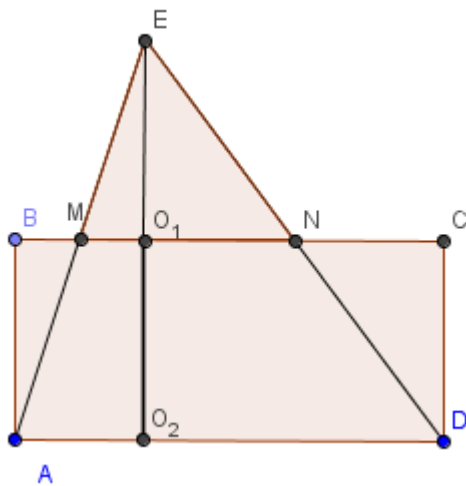


Рисунок 36

Пользуясь представленным чертежом (рис.36) , найдите площадь прямоугольника. Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

13. ([15, №473] Через вершину C треугольника ABC проведена прямая m , параллельная стороне AB . Докажите, что все треугольники с вершинами на прямой m и основанием AB имеют равные площади).

Через вершину C треугольника ABC проведена прямая m , параллельная стороне AB . Исследуйте вопрос о том, чему равна площадь всех треугольников с вершинами на прямой m и основанием AB . Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

14. ([15, №474] Сравните площади двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой).

Исследуйте вопрос о площадях двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой. Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

15. ([15, №475] Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей).

Создайте в GeoGebra компьютерную визуализацию утверждения «Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей». Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.

16. ([15, №478] В выпуклом четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей).

Создайте в GeoGebra компьютерную визуализацию утверждения «Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей». Сформулируйте основную идею доказательства. Запишите шаги доказательства.